ESTUDOS RBEP

Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino

Sandra Magina
Francisco Brabo Bezerra
Alina Spinillo

Resumo

Apresenta pesquisa de intervenção no ensino com vistas a desenvolver o conceito de frações em crianças de oito a dez anos. Dividiram-se 57 crianças em três grupos: Grupo Experimental (GE) e Grupo Controle (GC), formados por alunos da 3ª série do ensino fundamental sem instrução prévia sobre frações, e Grupo de Referência (GR), formado por crianças da 4ª série que já haviam tido instrução sobre frações por meio de uma abordagem mecanicista e de aplicação de regras. O GE passou por uma intervenção no ensino baseada na resolução de situações-problema de frações como quociente e como relação parte-todo. Essas situações eram apresentadas por meio da combinação e das comparações entre diferentes suportes de representação, fomentando discussões em que as crianças refletiam acerca dos processos de resolução adotados. Todos os participantes realizaram um pré-teste e um pós-teste. O GE mostrou um progresso mais expressivo do que os demais grupos.

Palavras-chave: formação de conceito; ensino de fração; ensino fundamental.

Abstract

How to develop children's comprehension about fraction? A teaching experience

This study involves a teaching experiment aimed to improve children's understanding of fractions. 57 children (8-10 years old) were divided into 3 groups: Experimental and Control Groups: 3rd graders with no previous instruction in fractions; and Reference Group: 4th graders who were taught in a traditional way based on a mechanistic approach to fractions and focused on application of rules. The children who participated in the Experimental Group were offered a teaching experience based on the resolution of problem-situations involving fractions as quotient and as part-whole relationship. Those situations were presented through combinations and comparisons among different representation supports, in a discussion context in which the children reflected on the solution processes adopted. All participants were given a pre and a post-test. The Experimental Group showed a more expressive improvement than the other groups.

Keywords: building concepts; teaching of fractions; elementary school.

1 A complexidade do conceito de fração

Tanto pesquisadores como educadores comentam as dificuldades experimentadas por crianças com o conceito de fração. Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), por exemplo, relacionam algumas das dificuldades ao fato de a criança não compreender o princípio da invariância (conservação de quantidades) e não dispor de um pensamento reversível que lhe permita perceber que a soma das partes é igual ao todo inicial que as originou. A noção de equivalência, nem sempre entendida, também é apontada como importante por alguns autores para a compreensão de frações (e.g., Kerslake, 1986, Nunes, 2003, Nunes; Bryant, 1996, Streefland, 1997). Outros autores ressaltam a dificuldade com a linguagem e a notação típica de frações (e.g., Brizuela, 2005, Mack, 1990), enquanto outros comentam que muitas das dificuldades das crianças decorrem do fato de aplicarem o conhecimento que possuem acerca dos números inteiros às frações, acreditando que: (i) a representação simbólica a/b nada mais é do que dois números inteiros, um sobre o outro; e (ii) 1/3 é menor do que 1/4, porque três é menor do que quatro (e.g., Biddlecomb, 2002, Gelman; Meck, 1992, Lamon, 1999, Nunes, 2003, Sophian; Garyantes; Chang, 1997, Streefland, 1991). O conhecimento sobre números inteiros é

também aplicado à adição de frações, visto que as crianças tendem a somar os numeradores e os denominadores para obter o resultado de uma adição (e.g., Cruz; Spinillo, 2004, Kerslake, 1986, Koyama, 1997, Spinillo; Cruz, 2004).

Além dessas dificuldades documentadas em pesquisas realizadas com crianças, é possível comentar que o próprio conceito de fração é de natureza complexa e multifacetada. Por exemplo, dependendo da situação em que esteja inserida, a fração pode assumir diferentes significados (e.g., Behr; Lesh; Post; Silver, 1983, Gravemeijer, 1997, Nunes, 2003, Ohlsson, 1991, Streefland, 1997, Vergnaud, 1983): (i) um número em uma reta numérica (um inteiro e dois terços); (ii) um operador (um terço de 12 bolinhas de gude); (iii) um quociente derivado de uma divisão (duas barras de chocolate repartidas entre três crianças); e (iv) uma relação parte-todo (uma fatia de pizza dividida em 12 fatias). Outro exemplo dessa complexidade é o fato de a fração estar fortemente associada a outros conceitos igualmente complexos como divisão, probabilidade, porcentagem, razão e proporção.

2 O conceito de fração e o campo conceitual das estruturas multiplicativas

Spinillo e Lautert (2006) afirmam que ao se tratar de frações à luz da teoria de Vergnaud (1983, 1997, 1998, 2003) torna-se necessário considerar três pontos distintos, porém relacionados. O primeiro ponto refere-se à ideia de campo conceitual, associando a fração a outras definições de natureza multiplicativa. O segundo refere-se à ideia de que todo conceito possui um conjunto de invariantes que o caracterizam, sendo, no caso da fração: (i) a divisão equitativa das partes; (ii) o esgotamento do todo; (iii) a relação entre o número de partes e o número de cortes necessários para obtê-las; (iv) a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; e (v) o princípio de invariância (a divisão do todo em partes não altera a unidade inicial). O terceiro ponto refere-se à noção de esquema, no caso das frações, o esquema de partição, o de equivalência e o relacional parte-todo.

O esquema de partição emerge na ação de repartir que, segundo Behr, Lesh, Post e Silver (1983), Sophian, Garyantes e Chang (1997) e Pepper e Hunting (1998), está na origem da compreensão acerca da relação inversa entre o tamanho do todo e o número de partes em que foi dividido. O esquema de equivalência está associado à ação de compor e decompor unidades fracionárias com vistas a gerar uma unidade diferente, porém equivalente à soma de suas partes (Cruz; Spinillo, 2004, Spinillo; Cruz, 2004). De acordo com Berh, Wachsmuth, Post e Lesh (1984), a compreensão da equivalência de frações requer estabelecer relações compensatórias entre a área e o número de partes iguais em que foi dividida a unidade. O esquema relacional parte-todo, como indicado por Berh, Lesh, Post e Silver (1983), é essencial para o desenvolvimento do

conceito de número racional, porque se encontra diretamente relacionado à possibilidade de dividir o todo (contínuo ou discreto) em partes iguais. Esses esquemas e as ações a eles relacionadas estão em estreita relação com os invariantes do conceito de fração. Assim, estudar uma definição, em termos de seu campo conceitual, implica considerá-la em suas relações com outros conceitos que, por demandarem esquemas de ações semelhantes, se auxiliam mutuamente, no sentido de que contribuem de forma recíproca, um na constituição do outro, compartilhando invariantes, situações e formas de representação.

3 O ensino tradicional de frações

Diversas são as críticas a respeito do ensino de frações na escola, como apontam os pesquisadores da área (e.g., Gravemeijer, 1997, Kieren, 1992, 1993, Moss; Case, 1999, Nunes, 2003, Streefland, 1991). Em linhas gerais, o ensino de frações tem se caracterizado por uma ênfase no simbolismo e na linguagem matemática, na aplicação mecânica de algoritmos (sobretudo na aritmética de frações) e no uso de representações diagramáticas. Diagramas são amplamente utilizados para ilustrar as relações parte-todo e para explicar a notação (o denominador corresponde ao número de partes em que o todo foi dividido e o numerador ao número de partes pintadas no diagrama) e a linguagem fracionária (um terço, um quinto). A ênfase recai sobre um dentre os diferentes significados que podem ser atribuídos à fração: as relações parte-todo. Em termos de representação, observa-se uma forte ênfase em quantidades contínuas do que em quantidades discretas, sobretudo no ensino introdutório, passando-se a ideia de que fração é um pedaço de algo (pizza, barra de chocolate). A sequência didática parece iniciar-se por explicações acerca das relações entre uma quantidade representada por diagramas ou desenhos, e passa, em seguida, a adotar, quase que exclusivamente, a representação simbólica formal associada a situações que requerem resoluções algorítmicas. Esse modo de ensinar ignora outras formas possíveis de representar a fração e a variedade de significados a ela associados, restringindo-se às relações parte-todo. A fração é considerada de forma isolada, sem que sejam feitas as conexões com outros conceitos (divisão, porcentagem, probabilidade, razão, proporção) e noções relevantes para sua compreensão (equivalência, parte-todo). Observa-se, ainda, que o ensino é dissociado de situações extraescolares, ignorando o conhecimento informal e espontâneo que a criança adquiriu fora da sala de aula.

Nessa direção, Campos e Magina (2004), ao investigarem as estratégias de ensino utilizadas por 70 professores primários no ensino da fração, verificaram que elas se resumiam a comparações perceptuais (desenhos e material concreto). Além do mais, Magina e Campos (no prelo), ao compararem as estratégias de ensino propostas pelos professores primários e os desempenhos apresentados por alunos das 3ª e 4ª séries,

na resolução de problemas envolvendo o conteúdo de fração, observaram que a maioria dos professores, embora conseguisse identificar e explicar, de maneira aceitável, os erros cometidos pelos alunos em diferentes situações, apresentaram estratégias de ensino muito limitadas, não favorecendo os alunos a superar suas dificuldades. Tais estratégias limitam-se praticamente à indicação do uso do desenho ou do material concreto, visando facilitar comparações perceptivas em detrimento do ensino de ordem e equivalência, invariantes operatórios necessários para a compreensão do conceito em referência. Além disso, parece não haver uma clareza desses professores sobre os diferentes significados da fração, o que os leva a propor situações que se restringem à percepção e ao significado parte-todo.

Por outro lado, a ênfase excessiva no simbolismo formal é criticada por Kerslake (1986) ao ressaltar o papel desempenhado pelos recursos perceptuais na compreensão das crianças sobre equivalência. A autora observou que as representações geométricas eram mais facilitadoras na resolução de adição de frações do que quando a forma simbólica tradicional era apresentada. Mas não apenas recursos perceptuais como figuras geométricas são relevantes para uma compreensão acerca da equivalência, mas também o uso de pontos de referência que servem de âncora para o raciocínio, como observado por Cruz e Spinillo (2004) e Spinillo e Cruz (2004) ao investigarem a resolução de adição de frações em crianças a partir do uso do referencial de metade.

Assim, algumas das causas das dificuldades das crianças com fração residem na complexidade inerente a esse conceito e na abordagem aplicada ao ensino desse conteúdo na escola. Parece haver, então, a necessidade de se explorar formas alternativas de ensino que considerem uma visão mais ampla da fração (tanto em termos de representação como de significado), que encorajem o aluno a adotar seu conhecimento informal sobre frações e que o auxiliem na superação das dificuldades encontradas em relação a esse conceito.

4 Algumas experiências alternativas de ensino

Com isso em mente, alguns pesquisadores dedicaram-se a explorar diferentes perspectivas relativas ao ensino de fração tanto em sala de aula como por meio de situações experimentais controladas.

Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984) realizaram um estudo de intervenção com crianças da 4ª série do ensino fundamental que, enquanto a intervenção estava em andamento, não recebiam qualquer instrução formal sobre números racionais. A intervenção consistia em atividades realizadas individualmente e em pequenos grupos que abordavam cinco tópicos (nomeação, comparação, equivalência, adição e multiplicação de frações). Material concreto variado e diferentes suportes de representação eram utilizados (desenhos, diagramas, figuras geométricas, linha numérica). Os dados foram analisados a partir do desempenho e do

processo de resolução adotado em relação apenas à comparação e à equivalência de frações. Observou-se que ao final da intervenção o principal ganho foi que as crianças eram capazes de fazer comparações apropriadas entre frações com um mesmo numerador e com numeradores diferentes, sugerindo haver uma menor interferência do conhecimento dos números inteiros sobre os fracionários. Ao julgar a equivalência de frações, muitas crianças ainda não percebiam a necessidade de considerar simultaneamente o numerador e o denominador, apresentando dificuldades. Nota-se que a intervenção parece não ter propiciado ganhos expressivos, tendo papel facilitador apenas em relação a frações com um mesmo numerador, sobretudo em relação à comparação de frações.

Situações de intervenção mais proveitosas foram conduzidas por outros pesquisadores, como Pitkethly e Hunting (1996). Entretanto, possivelmente, os resultados mais expressivos documentados na literatura sejam aqueles derivados de um projeto de ensino de longo prazo realizado por pesquisadores da University of Georgia, Estados Unidos, com crianças da 4ª à 6ª série (e.g., Biddlecomb, 2002, Olive; Steffe, 2002, Olive, 1999, Olive; Vomvoridi, 2006, Steffe, 2002, Steffe; Olive, 1990, Tzur, 1999, 2004), como ilustram dois estudos a seguir.

Tzur (2004) explorou uma experiência de ensino que tinha por objetivo desenvolver a noção de reversibilidade considerada inerente ao conceito de fração. Essa noção refere-se à capacidade de compreender que a partir de uma fração não-unitária (5/8 de pizza, por exemplo) é possível se reconstituir o todo do qual ela se originou. Um erro frequente é a criança partir essa fração em oito partes em vez de cinco (que corresponderia a 1/8 do todo original). O objetivo da intervenção era desenvolver a habilidade de compor e decompor frações não-unitárias como forma de tratar a reversibilidade. A intervenção foi proposta a dois alunos de 4ª série que já tinham ampla experiência com frações. O pesquisador atuava como professor, explorando diversas situações-problema, inclusive mediadas pelo computador. O papel do pesquisador consistia em solicitar explicações sobre as formas de resolver problemas, colocar novos desafios e apresentar contra-argumentos. A principal dificuldade que os alunos experimentavam, e que foi posteriormente superada, estava relacionada ao fato de tentarem partir a fração não-unitária da mesma forma como partiam uma fração unitária, o que gerava erros semelhantes àquele acima mencionado. A compreensão da possibilidade de compor e decompor frações não-unitárias (reversibilidade fracionária) é uma aquisição importante que está subjacente à compreensão da multiplicação de fração por um número inteiro, da adição e subtração de frações impróprias e da divisão de fração.

Olive e Vomvoridi (2006) procuraram desenvolver no aluno a capacidade de estabelecer relações multiplicativas entre a fração unitária e o todo, e a de derivar frações de frações (frações unitárias e frações não-unitárias). A partir de um estudo de caso baseado em análises de episódios de ensino extraídos de uma sala de aula de 6ª série, os autores verificaram que um dos aspectos mais importantes para o progresso do

aluno foi o fato de o professor passar a compreender sua perspectiva e mudar sua forma de conduzir as situações de ensino. O docente era solicitado a analisar sua própria atuação em sala de aula e a forma como o aluno realizava as atividades. As discussões conduzidas acerca dos episódios de ensino e da interpretação do professor demonstram a importância de se perceber a atividade matemática dos alunos em possíveis esquemas conceituais, e a necessidade de se alterar e adaptar as estratégias de ensino para auxiliar na construção desses esquemas.

A importância do conhecimento do aluno também foi foco de análise de outros estudos, como é o caso da pesquisa conduzida por Mack (2001) sobre a divisão e a multiplicação de frações. Considerando que o conhecimento não se desenvolve de maneira linear, mas de forma recursiva em que há retornos ao conhecimento inicial, examinou-se a ideia de que este poderia auxiliar a aquisição de conceitos complexos, e que até mesmo conhecimentos restritos e de pouco alcance poderiam estimular conexões entre ideias sofisticadas, vindo a auxiliar o aluno a reconstruir seu conhecimento e direcioná-lo para patamares mais elaborados. Seis alunos da 5ª série, que já haviam sido ensinados sobre frações unitárias e não-unitárias, receberam individualmente, durante três meses, uma intervenção que combinava entrevista clínica com instruções voltadas para a resolução de situações-problema e para a cooperação entre o adulto e a criança. Essa criança era solicitada a resolver situações-problema em voz alta, usando material concreto, lápis e papel, e a comunicar verbalmente sua forma de pensar durante o processo de resolução, podendo fazer perguntas e solicitar ajuda do pesquisador. Este, por sua vez, encorajava o aluno a usar seu conhecimento informal e fornecia assistência quando solicitado ou quando necessário. Os resultados mostraram que no início nenhum dos alunos era capaz de partir um todo na forma de uma fração não-unitária (por exemplo, 2/3 de uma pizza) e tampouco eram capazes de fazer isso em relação a quantidades discretas quando o número de elementos do conjunto era múltiplo do número total de partes sugeridas pelo nome da fração (por exemplo, 1/4 de 8 biscoitos). Inicialmente, comenta a autora, os alunos entendiam que o todo era formado por partes iguais (por exemplo, 1/3, 1/3 e 1/3); tendo dificuldades em aceitar a ideia de que o todo pode ser fracionado em partes diferentes, passíveis de agrupamentos (por exemplo, 2/3 e 1/3, ou 1/4, 1/4 e 1/2). Após a intervenção, e ao longo dela, os alunos passaram a considerar a fração não-unitária como algo que podia ser fracionado (fração da fração), e que a unidade fracionária poderia ser agrupada formando frações não-unitárias ou recompondo o todo inicial. Na realidade, o princípio da composição e da decomposição foi compreendido, aspecto esse relevante para a aritmética de frações. Os resultados mostraram que o conhecimento inicial sobre partição pode servir de base para a compreensão de conhecimentos complexos como a multiplicação e a divisão de fração.

Os estudos de intervenção acima discutidos tratam de diferentes aspectos relativos ao conceito de fração. Alguns deles procuram auxiliar na superação de dificuldades específicas, como é o caso da intervenção

proposta por Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984), que procurou levar as crianças a comparar frações e a estabelecer a equivalência entre elas. Outros estudos examinam a contribuição de conhecimentos iniciais (ainda que restritos e de pouco alcance) sobre a formação de ideias mais complexas relativas ao conceito de fração, como é o caso do estudo de Biddlecomb (2002) acerca da possibilidade de que o conhecimento sobre números inteiros poderia servir de base para a compreensão de frações, e do estudo realizado por Mack (2001), que mostrou que o conhecimento inicial sobre partição contribui para a compreensão da multiplicação e da divisão de fração. Outros estudos propõem situações de ensino com vistas a desenvolver a noção de reversibilidade, considerada inerente ao conceito de fração, como o estudo de Tzur (2004). Assim como Mack (2001), Olive e Vomvoridi (2006) buscaram desenvolver a capacidade de derivar frações de frações e a de compor e decompor, aspectos esses relacionados à noção de reversibilidade, que é importante para a compreensão da aritmética de frações.

Dois pontos podem ser destacados a respeito desses estudos. O primeiro é que muitos deles se caracterizam por estudos de caso, os quais são relevantes, pois fornecem um quadro extremamente detalhado e rico de dados, como pode ser visto nas discussões e nas análises de entrevistas e de episódios de ensino tomados para discutir os relatos desses estudos. Porém, parece ser igualmente importante investigar o papel desempenhado por experiências de ensino realizadas com um maior número de crianças e em condições experimentais mais controladas. Dados extraídos de fontes diversas (observações naturais e experimentais, análises qualitativas e quantitativas) podem fornecer um conjunto expressivo de informações a respeito de um campo específico do conhecimento. Dessa forma, parece ser relevante conduzir estudos de intervenção que ocorram em situações experimentais, como aquela que será descrita neste artigo, que abrangem um maior número de participantes e que propiciam o estabelecimento de comparações entre grupos e entre momentos diferentes na aquisição de um dado conhecimento.

O segundo ponto é que na maioria desses estudos as crianças já haviam sido instruídas sobre fração no contexto escolar. Parece ser interessante examinar o papel desempenhado por uma proposta de ensino com crianças que ainda não tenham sido formalmente instruídas sobre fração, comparando-as, inclusive, com as que receberam tal instrução no contexto escolar.

A partir dessas considerações, o presente estudo teve por objetivo investigar se crianças que ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre fração se beneficiariam de uma intervenção específica em que a fração fosse considerada tanto uma relação parte-todo como um quociente derivado de uma divisão. A opção por essas duas instâncias baseou-se na importância atribuída às relações parte-todo na compreensão dos números racionais e na importância atribuída à ação de repartir na construção do conceito de fração (Kieren, 1992, 1993, Nunes, 2003, Pepper; Hunting, 1998, Pitkethly; Hunting, 1996, Sophian; Garyantes; Chang, 1997).

A exemplo de outros estudos na área, a intervenção proposta baseava-se em situações-problema apresentadas em um contexto de discussão em que tanto o pesquisador como os alunos explicitavam suas formas de pensar e de resolver essas situações-problema. Nesse contexto de discussão, o conhecimento informal dos alunos sobre fração (estratégias usadas, representações não-convencionais) era amplamente considerado. Com este estudo, testou-se a ideia de que uma intervenção como essa poderia levar crianças que não haviam sido instruídas sobre fração a terem um conhecimento mais elaborado do que crianças mais velhas e em série mais adiantada que já haviam sido instruídas por meio de um ensino tradicional.

5 Método

5.1 Participantes

Participaram do estudo 57 crianças de baixa renda com idades entre oito e dez anos, estudantes de escolas públicas de São Paulo, Brasil. Os participantes foram divididos em três grupos:

- Grupo Controle (GC): 20 alunos de 3ª série que nunca haviam recebido qualquer tipo de instrução sobre fração no contexto escolar, visto que o currículo escolar prevê o ensino de fração apenas a partir da 4ª série do ensino fundamental.
- Grupo de Referência (GR): 18 alunos de 4ª série com instrução formal sobre fração no contexto escolar. Na escola investigada, o ensino de fração se caracterizava por um ensino tradicional voltado, fundamentalmente, para uma abordagem mecânica e algorítmica da fração, sendo enfatizada a aplicação de regras e o uso da representação simbólica formal.
- Grupo Experimental (GE): 19 alunos de 3ª série que não haviam recebido qualquer instrução sobre fração no contexto escolar. A esse grupo foi oferecida uma experiência de ensino que será apresentada adiante.

5.2 Procedimento e planejamento experimental

Inicialmente, um pré-teste foi aplicado a todos os participantes com vistas a examinar o conhecimento das crianças sobre fração. Oito semanas após a aplicação do pré-teste, todos os participantes foram submetidos a um pós-teste com o objetivo de examinar se haviam ou não progredido quanto ao conhecimento sobre fração demonstrado no pré-teste. Durante essas oito semanas, as crianças do Grupo de Referência (GR), por serem estudantes da 4ª série, continuaram tendo aulas regulares de matemática, inclusive sobre frações. Isso não ocorria com o Grupo Controle (GC) e

com o Grupo Experimental (GE) que, por serem alunos da 3ª série, não recebiam instrução sobre fração. No entanto, durante esse período, foi oferecida às crianças do GE uma intervenção instrucional descrita mais adiante.

5.3 O pré-teste e o pós-teste

O pré-teste e o pós-teste consistiam na resolução de 15 itens cada, sendo alguns deles exemplificados na Figura 1.

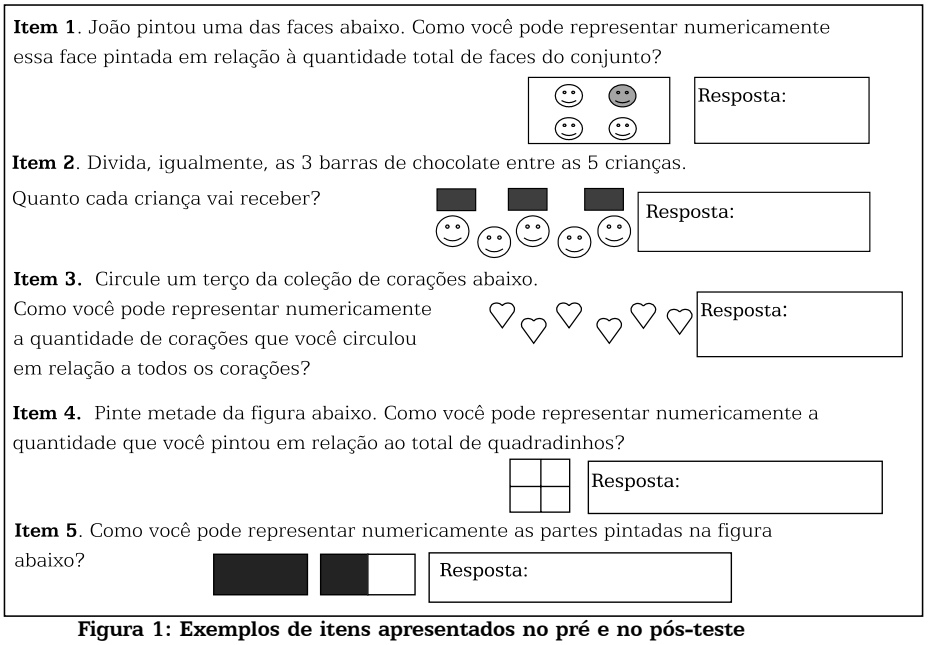

Figura 1: Exemplos de itens apresentados no pré e no pós-teste

Os itens se caracterizavam como tarefas tipicamente escolares, sendo qualificados conforme descrição a seguir, tomando por base os exemplos constantes na Figura 1.

Item 1: envolvia quantidades discretas e requeria da criança representar uma quantidade, já especificada no enunciado, sob a forma de fração. Enfatizava-se a representação fracionária de uma relação parte-todo.

Item 2: envolvia quantidades contínuas e requeria da criança realizar uma divisão e, então, representar, sob a forma de fração, o resultado obtido.

Item 3: envolvia quantidades discretas e requeria da criança assinalar uma determinada quantidade que era especificada no enunciado por meio da linguagem fracionária (um terço) e, então, representar, sob a forma de fração, a quantidade que assinalou. Enfatizava-se a representação fracionária de uma relação parte-todo. Nesse item, a criança deveria dar como resposta uma fração equivalente a um terço.

Item 4: envolvia quantidades contínuas e requeria da criança assinalar uma determinada quantidade que era especificada no enunciado e, então, representar, sob a forma de fração, a quantidade que assinalou. Enfatizava-se a representação fracionária de uma relação parte-todo.

Item 5: envolvia quantidades contínuas e requeria da criança representar uma quantidade, já especificada no enunciado, sob a forma de fração mista.

O pré-teste e o pós-teste foram aplicados coletivamente na sala de aula, sendo os itens apresentados por escrito na forma de um pequeno livro (um item por página) e respondidos individualmente. Os itens no pré e no pós-teste eram os mesmos, diferindo apenas quanto aos referentes das quantidades presentes nos enunciados.

5.4 A intervenção

A intervenção consistiu em dez sessões realizadas no contexto escolar durante o horário regular de aula, foram ministradas duas sessões por semana no período de cinco semanas, com duração de duas horas cada. A dinâmica da sala de aula baseava-se na resolução de problemas de fração, em pequenos grupos ou em pares, que envolviam tanto problemas verbais quanto jogos e situações baseadas em atividades extraescolares, como a feira, por exemplo. Durante o processo de resolução, eram endereçadas perguntas com o objetivo de esclarecer a forma de raciocinar dos alunos e os procedimentos adotados. Situações de discussão e de colaboração marcavam a interação entre alunos e entre alunos e pesquisador.

A assistência fornecida aos alunos se caracterizava por intervenções em que o pesquisador: (i) atuava como professor que propunha atividades, levantava questões e direcionava discussões; (ii) fornecia *feedback* e explicações acerca do acerto/erro dos estudantes, corrigindo-os quando necessário; (iii) colocava a forma de raciocinar dos alunos em evidência, tornando-a objeto de discussão, reflexão e análise (ver Spinillo, 1999, 2003); (iv) tomava o raciocínio dos estudantes como ponto de partida da ação didática; e (v) apresentava uma conclusão acerca de toda a atividade realizada, fosse ela correta ou incorreta.

O material oferecido era bastante variado, como material concreto e manipulativo, representações gráficas variadas (diagramas, representações icônicas, pictográficas e simbólicas – números e linguagem natural) e folhas de papel quadriculado. Esses suportes eram utilizados de forma combinada, permitindo que, durante um mesmo processo de resolução, o aluno simultaneamente utilizasse diferentes formas de representação. A representação simbólica das frações era sistematicamente associada a outras formas de representação (diagramáticas, pictóricas etc.), permitindo que os alunos compreendessem a diversidade de representações associadas à fração e as relações entre elas.

O tratamento dado à fração concentrava-se em frações representando quantidades tanto contínuas quanto discretas, exploradas a partir de relações parte-todo, e em frações relativas ao quociente resultante de situações envolvendo a divisão de quantidades. A intervenção voltava-se para alguns dos invariantes do conceito de fração, como a relação parte-todo, a necessidade da igualdade entre as partes e a possibilidade de reagrupá-las para se ter o todo novamente. Frações próprias e impróprias foram trabalhadas, bem como a equivalência entre frações, representando quantidades discretas e contínuas. Os problemas e atividades propostas envolviam reflexões acerca da linguagem matemática própria de frações, explicando o significado do numerador e do denominador.

6 Resultados

Os resultados do pré e do pós-teste dos três grupos de participantes foram analisados em função de três aspectos: do número de respostas corretas, de cada criança individualmente e dos tipos de erro apresentados.

6.1 Respostas corretas nos três grupos

O Teste U de Mann-Whitney não detectou diferenças significativas entre os grupos no pré-teste (GE vs. GC: p[1] = 0,6080; GE vs. GR: p = 0,7330; GC vs. GR: p = 0,7502). Entretanto, foram observadas diferenças entre os grupos no pós-teste (GE vs. GC: p = 0,0000; GE vs. GR: p = 0,0000; GC vs. GR: p = 0,0000). Como mostra a Tabela 1, esse resultado ocorreu porque no pré-teste os três grupos apresentavam um mesmo nível de desempenho (o percentual de acertos variava de 10% a 12%), enquanto que no pós-teste o GE (69,8%) e o GR (31,8%) tiveram um melhor desempenho do que o GC (12,3%). Importante comentar que o desempenho das crianças do GE foi expressivamente maior do que aquele identificado entre as crianças do GR.

Tabela 1 – Desempenho geral, dos três grupos, nos pré e pós-testes

	Grupo experimental (n = 285)	Grupo de controle (n = 300)	Grupo de referência (n = 270)
Pré-teste	29 (10,2%)	36 (12%)	29 (10,7%)
Pós-teste	199 (69,8%)	37 (12,3%)	86 (31,8%)

O desempenho no pré e no pós-teste de cada grupo de participantes foi comparado por meio do Teste de Wilcoxon, que não identificou diferenças significativas entre as duas ocasiões de testagem no GC (p = 0,5014, Pré-teste: 12% e Pós-teste: 12,3%). Entretanto, as crianças nos outros dois

[1] A letra "p" representa a probabilidade dos resultados do teste U, na comparação entre os grupos de nossa pesquisa, terem sido ao acaso (hipótese nula). Normalmente considera-se um valor p de 0,05 como o patamar para avaliar a hipótese nula. Se o valor p for inferior a 0,05 podemos rejeitar a hipótese nula. No caso em questão, como os valores foram superiores a 0,05, então podemos afirmar que os grupos não diferem entre si, ou seja, são semelhantes.

grupos tiveram um melhor desempenho no pós-teste do que no pré-teste (GE: p = 0,001; GR: p = 0,003). Vale ressaltar que entre as crianças do GR, o percentual de acertos no pós-teste (31,8%) foi cerca de três vezes maior que o percentual de acertos obtido no pré-teste (10,7%). Mais expressivo, entretanto, foi o resultado obtido em relação ao GE, cujo percentual de acertos no pós-teste (69,8%) foi quase sete vezes maior que o percentual de acertos obtido no pré-teste (10,2%). Assim, embora as crianças dos dois grupos tenham se beneficiado da instrução recebida (tradicional do GR e a intervenção alternativa do GE), as crianças do GE tiveram, sem dúvida, um progresso muito mais expressivo do que as do GR.

6.2 Cada criança individualmente

Além dessa análise voltada para as respostas das crianças, foi conduzido um estudo de cada participante quanto aos dois momentos de testagem. Considerando cada criança individualmente, observou-se que havia aquelas que progrediam do pré-teste para o pós-teste, aquelas que mostraram uma regressão do pré-teste para o pós-teste, e outras que apresentavam uma estabilidade sem que houvesse qualquer alteração em seu desempenho nas duas ocasiões de testagem, como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Percentuais de respostas corretas nos pré e pós-testes, por grupos de sujeitos

Itens	Grupo experimental		Grupo de controle		Grupo de referência	
	Pré-teste (%)	Pós-teste (%)	Pré-teste (%)	Pós-teste (%)	Pré-teste (%)	Pós-teste (%)
1	0	68	0	0	6	89
2	0	84	0	0	0	11
3	0	58	0	0	0	11
4	5	63	0	10	0	33
5	0	95	0	0	6	72
6	0	32	40	30	6	0
7	0	37	0	0	0	0
8	5	90	45	5	11	17
9	26	68	35	5	28	0
10	0	37	0	5	0	28
11	74	79	30	75	44	78
12	0	68	0	0	6	67
13	5	100	15	45	22	33
14	0	95	0	0	0	28
15	42	74	15	10	33	11
Média Total	**11**	**70**	**12**	**12**	**11**	**32**

Devido aos valores muito baixos, não foi possível aplicar um tratamento estatístico aos dados referentes à Tabela 2. No entanto, é possível perceber que todas as crianças do GE e a quase totalidade das crianças do GR apresentaram algum tipo de melhoria do pré para o pós-teste, o que não ocorreu com as crianças do GC. Neste grupo, 20% das crianças tiveram no pós-teste o mesmo desempenho obtido no pré-teste, e 35% delas tiveram regressões, ou seja, apresentaram percentuais de acertos mais baixos no pós-teste do que no pré-teste.

Dado o progresso do pré-teste para o pós-teste entre as crianças do GE e do GR, pareceu importante saber o nível de progressão que cada participante alcançara entre as duas ocasiões de testagem. Para tal, cada criança foi classificada em um dentre três níveis de progressão: Nível I – crianças cujo desempenho no pós-teste havia melhorado até 30% em relação ao pré-teste; Nível II – crianças com melhoria de 31% a 60%; e Nível III – crianças com melhoria de 61% a 100%. A Tabela 3 apresenta a distribuição dos participantes dos três grupos nesses níveis.

Tabela 3 – Número e porcentagem de crianças que progrediram do pré para o pós-teste

Níveis de progressão	Grupo experimental (n=19)	Grupo de controle (n=8)	Grupo de referência (n=17)
Nível I (1 – 30%)	0	8 (100%)	12 (70,6%)
Nível II (31 – 60%)	9 (47,4%)	0	5 (29,4%)
Nível III (61 – 100%)	10 (52,6%)	0	0

Como pode ser observado, apenas oito crianças do GC apresentaram progressão em seus desempenhos do teste inicial (pré-teste) para o final (pós-teste). Além disso, tanto o progresso do GR como o do GC se caracterizava por progressões Nível I, que eram as menos expressivas; enquanto as crianças do GE se dividiam entre o Nível II e o III. Importante comentar que o Nível III (progressões mais expressivas) envolvia apenas crianças do GE. Esse dado indica que os maiores percentuais de progresso do pré para o pós-teste eram observados no desempenho dos participantes do GE, demonstrando que a intervenção proposta era bastante efetiva.

6.3 Tipos de erro

Três tipos de erro foram identificados no desempenho das crianças nas duas ocasiões de testagem, como descrito a seguir:

Tipo 1 – a criança interpreta fração como um número natural ao representar sua resposta simbolicamente. Esse tipo de erro foi amplamente documentado na literatura, como mencionado, sendo mais frequente quando quantidades discretas estavam envolvidas.

Tipo 2 – a criança interpreta fração como um número natural durante a resolução do problema. Esse tipo de erro era mais frequente quando quantidades discretas estavam envolvidas.

Tipo 3 – a criança não reconhece a necessidade de dividir o todo em partes iguais durante a resolução dos itens que requeriam essa divisão. Esse tipo de erro ocorria quando quantidades contínuas estavam envolvidas.

Os erros Tipo 1 estavam relacionados à representação que a criança adotava ao registrar por escrito o resultado, enquanto os erros Tipo 2 e os Tipo 3 eram relacionados ao procedimento de resolução utilizado. Erros Tipo 1 e Tipo 2 expressavam a dificuldade experimentada pela criança para discriminar frações de números naturais, enquanto erros Tipo 3 expressavam a dificuldade que as crianças apresentavam ao dividir o todo em partes iguais.

A Tabela 4 mostra a distribuição desses erros no Grupo Experimental e no Grupo de Referência nas duas ocasiões de testagem. Nessa tabela é possível comparar-se as dificuldades das crianças que haviam recebido algum tipo de instrução a respeito de frações, procurando examinar qual dos dois tipos de instrução mais auxiliava a criança a superar as dificuldades experimentadas no pré-teste.

Tabela 4 – Incidência dos tipos de erro, por grupos

Tipos de erro	Grupo experimental		Grupo de referência	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Tipo 1	159	29	128	49
Tipo 2	32	29	23	51
Tipo 3	18	5	24	26

Erro Tipo 1 era o tipo de erro mais frequente na ocasião do pré-teste, tendendo a diminuir sensivelmente na ocasião do pós-teste, tanto no GE como no GR. Entretanto, a diminuição de erros era mais acentuada entre as crianças do GE (de 159 para 29) do que entre as do GR (de 128 para 49). No GE também houve uma diminuição dos erros Tipo 3 (de 18 para 5), o que se observou entre as crianças do GR (de 24 para 26). Um dado interessante é que no GR houve um aumento no número de erros Tipo 2 (de 23 para 51). No momento não se tem uma explicação para isso.

Assim, apesar de ambos os grupos haverem contribuído para a superação de algumas das dificuldades iniciais identificadas no pré-teste,

as crianças que participaram da intervenção (GE) tiveram uma melhora bem mais expressiva e substancial do que aquelas que haviam sido instruídas por meio de um ensino tradicional (GR). Merece ser destacado o fato de que as crianças do GE eram mais novas e frequentavam série mais elementar do que as crianças do GR que já haviam sido instruídas sobre fração.

Conclusões e discussão

Os resultados obtidos neste estudo revelam que a intervenção proporcionada foi capaz de gerar uma compreensão mais apropriada sobre frações, especialmente na sua forma simbólica de representação. Essa intervenção permitiu que crianças de 3ª série tivessem um melhor desempenho do que (i) crianças de mesma idade e de mesma série que ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre fração no contexto escolar (GC); e (ii) crianças mais velhas e em série mais adiantada (GR) que já haviam sido instruídas sobre fração por meio de ensino tradicional.

É interessante mencionar que, apesar do desempenho dos grupos ser o mesmo no pré-teste, as crianças que participaram da intervenção tiveram avanços mais substanciais do que aqueles observados entre as crianças submetidas ao ensino tradicional oferecido pela escola. Após a instrução, crianças que participaram da intervenção proposta ao GE aumentaram o número de respostas corretas e superaram as dificuldades iniciais experimentadas no pré-teste. Além disso, o número das que progrediram do pré-teste para o pós-teste foi maior entre essas crianças do que entre as do GR. A conclusão foi que, apesar de ambos os grupos se beneficiarem da instrução recebida, a intervenção alternativa sobre fração oferecida às crianças do GE foi mais efetiva do que a instrução tradicional dada ao GR.

Mas o que teria propiciado tal resultado? Uma tentativa de resposta a essa pergunta requer pensar na natureza da instrução fornecida às crianças do Grupo Experimental. Três aspectos marcaram a intervenção proposta. O primeiro era de natureza específica, voltado para as facetas que caracterizam o conceito de fração, no caso, a fração como quociente e a fração como relação parte-todo. O segundo era de natureza representacional, voltado para o fato de que os suportes de representação não são excludentes (ou um ou outro), mas, antes de tudo, podem ser entendidos como diferentes possibilidades de representação, sendo articulados e combinados entre si de forma flexível. Esse é um aspecto importante acerca da representação em matemática, de maneira mais ampla. O terceiro refere-se a uma instância de natureza psicológica, a metacognição. Ao propor discussões a respeito das formas de resolver as situações-problema, ao encorajar a explicitação do conhecimento intuitivo do aluno e dos procedimentos de resolução adotados, o professor colocava as formas de pensar dos alunos em evidência, passando o pensamento a ser, ele próprio, um objeto de reflexão e de análise. Essa ação recursiva é

atividade cognitiva da maior relevância em situações de aprendizagem (Brown, 1987, Ribeiro, 2003, Spinillo, 1999, 2003). Segundo estudiosos da área (e.g., Fávero, 2001; Flavell, 1979, Seminério; Anselmé; Chahon, 1999), a metacognição pode ser entendida como: (i) um mecanismo responsável pela tomada de consciência, permitindo que o indivíduo compreenda o que fez, como fez e por que fez algo; e (ii) um mecanismo de autorregulação, permitindo que o indivíduo monitore e avalie suas ações, realizando ajustes sobre suas ideias e procedimentos.

Na realidade, acredita-se que esses três aspectos – as características do conceito de fração, a combinação flexível de diferentes suportes de representação e a metacognição – tenham contribuído para que a instrução oferecida tenha auxiliado os alunos a adquirirem um conhecimento mais apropriado sobre frações do que seus colegas que haviam sido instruídos sobre esse conceito de forma bem diferente. Para finalizar, é crucial encontrar formas de ensino que possam auxiliar as crianças a superar as dificuldades que encontram ao lidar com frações. É importante também estimular a discussão em sala de aula, como conversar com as crianças sobre seus erros, suas ideias e estratégias que usam (independentemente se corretas ou incorretas), e, sobretudo, ouvi-las, encorajando-as a comunicar suas formas de raciocinar e de interpretar as situações matemáticas.

Apesar dos benefícios trazidos, a intervenção oferecida apresenta duas limitações que poderão ser superadas em estudos posteriores. A primeira é que nessa intervenção não foram exploradas todas as facetas e situações que caracterizam a compreensão sobre fração. Uma vez que a ênfase da intervenção recaiu sobre as relações parte-todo e sobre a fração enquanto quociente, outras facetas da fração não foram contempladas. Sendo assim, pesquisas futuras poderiam propor intervenções mais amplas que observassem os vários significados relacionados à fração.

Referências bibliográficas

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126.

BEHR, M.; WACHSMUTH, I.; POST, T. R.; LESH, R. Order an equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* Virginia, v. 15, n. 5, p. 323-341, Sep./Oct. 1984.

BIDDLECOMB, B.D. Numerical knowledge as enabling and constraining fraction knowledge: an example of the reorganization hypothesis.

Journal of Mathematical Behavior, Amsterdam, v. 21, p. 167-190, Jan. 2002.

BRIZUELA, B, M. Yong children's notations for fractions. *Educational Studies in Mathematics,* v. 62, p. 281-305, 2005.

BROWN, A. L. Transforming school into communities of thinking and learning about serious matters. *American Psychologist,* n. 52, p. 399-413, 1997.

CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. Primary school teachers' concepts of fractions and teaching strategies. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICAL EDUCATION, 10., 2004, Copenhagen. Paper presented at TSG 22: Learning and cognition in mathematics: Students' formation of mathematical conceptions, notion, strategies and beliefs. Disponível em: <http://www.icme-organisers.dk/tsg22>.

CRUZ, M. S.; SPINILLO, A. Resolvendo adição de fração através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante*: *Revista de Investigação em Educação Matemática*, Lisboa, v.13, n. 2, p. 3-29, 2004.

FÁVERO, Maria Helena. As funções cognitivas e metacognitivas na prática do professor de matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2001, Curitiba, PR. *Trabalhos completos apresentados no I Simpósio...* [Curitiba], 2001. v. 1, p. 5-7.

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist,* v. 34, n. 10, p. 906-911, 1979.

GELMAN, R.; MECK, B. Early principles aid initial but not later conceptions of number. In: J. BIDEAUD; C. MELJAC; J. P. FISCHER (Orgs.). *Pathways to number*: children's developing numerical abilities. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1992, p. 171-190.

GRAVEMEIJER, K. Mediating between concrete and abstract. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Orgs.). *Learning and teaching mathematics:* an international perspective. Hover: Psychology Press, 1997. p. 315-446.

KERSLAKE, D. *Fractions: children's strategies and errors*: a report of the strategies and errors in secondary mathematics project. London: NFER-Nelson, 1986.

KIEREN, T.E. Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: implications for curriculum and instruction. In:

LEINHARDT, R.; PUTNAM, R.; HATTRUP, R. A. (Orgs.). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1992. p. 323-371.

KIEREN, T.E. Rational and fractional numbers: Form quotint fields to recursive understanding. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Orgs.). *Rational numbers:* an integration of the research. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1993. p. 49-84.

KOYAMA, M. Students' representations of fractions in a regular elementary school mathematics classroom. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1997, Lahti. *Proceedings...* Lahti, Finland, 1997. v. 3, p. 160-167.

LAMON, J. *Teaching fractions and ratios for understanding:* essential content and instructional strategies for children. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

MACK, N. K. Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 21, n. 2, p. 16-32, 1990.

_____. Building on informal knowledge through instruction in complex content domain: partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Virginia, v. 32, n. 3, p. 268-295, 2001.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of the rational numbers: new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, Virginia, v. 30, n. 2, p. 122-147, 1999.

NUNES, T. Criança pode aprender frações. E gosta! In: GROSSI, E. P. (Org.). *Por que ainda há quem não aprende?A teoria*. Rio de Janeiro: Vozes, 2003. p. 119-148.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell, 1996.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT J.; BEHR M. (Orgs.). *Number concepts in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1991, p. 553-592.

OLIVE, J. From fractions to rational numbers of arithmetic: a reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning,* Sidney, v. 1, n. 4, p. 279 -314, 1999.

OLIVE, J; STEFFE, L, P. The construction of an iterative fractional scheme: the case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior,* Amsterdam, *v.* 20, p. 413-443, 2002.

OLIVE, J; VOMVORIDI, E. Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: the case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior*, Amsterdam, v. 25, p. 18-41, 2006.

PEPPER, K.; HUNTING, R. Preschoollers' couting and sharing. *Journal for Research in Mathematics Education*, Virginia, v. 29, n. 2, p. 164-183, 1998.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. *The child's conception of geometry*. New York: Basic Books, 1960.

PITKETHLY, A.; HUNTING, R. A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, v. 30, p. 5-38, 1996.

RIBEIRO, C. Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem. *Psicologia Reflexâo e Crítica,* v. 16, n. 1, 109-116, 2003.

SEMINÉRIO, F. P.; ANSELMÉ, C. R.; CHAHON, M. Metacognição: um novo paradigma. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, Rio de Janeiro, v. 51, n. 1, p. 110-126, 1999.

SOPHIAN, C.; GARYANTES, D.; CHANG, C. When three is less than two: early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology, v. 33,* n. 5, p. 731-744, 1997.

SPINILLO, A.G. As relações entre aprendizagem e desenvolvimento discutidas a partir de pesquisas de intervenção. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, Rio de Janeiro, v. 51, n. 1, p. 55-74, 1999.

SPINILLO, A. G. Ensinando proporção a crianças: alternativas pedagógicas em sala de aula. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática,* Rio de Janeiro, v. 43, n. 3, p. 11-47, 2003.

SPINILLO, A. G.; CRUZ, M. S. S. Adding Fractions Using Half as an Anchor for Reasoning. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen. *Proceedings...* 2004. v. 4. p. 217-224.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: MEIRA L.; SPINILLO A. G. (Orgs.). *Psicologia cognitiva*: cultura, desenvolvimento e aprendizagem. Recife: Editora da UFPE, 2006. p. 46-80.

STEFFE, L. P.; OLIVE, J. Constructing fractions in computer microwords. In: BOOKER, G.; COBB, P.; DE MEDICUTI, T. N. (Eds.). *Proceedings of the 14th International Conference of the PME.* Mexico, DF: Conacyt, 1990. p. 59-66.

STEFFE, L, P. A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior,* Amsterdam, v. 20, p. 267-307, 2002.

STREEFLAND, L. *Fractions in realistic mathematics education*: a paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991.

_____. Charming fractions being charmed? In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Orgs.). *Learning and teaching mathematics:* an international perspective. Hove: Psychology Press, 1997. p. 347-371.

TZUR, R. An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal f or Research in Mathematics Education*, Virginia, v. 30, p. 390-416, 1999.

_____. Teacher and student's joint production of a reversible fraction conception. *Journal of Mathematical Behavior*, Amsterdam, v. 23, p. 93-114, 2004.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

_____. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T; BRYANT, P. (Orgs.). *Learning and teaching mathematics:* an international perspective. Hove: Psychology Press, 1997. p. 5-28.

_____. Multiplicative structures. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Orgs.). *Numbers concepts and operations in the middle grades.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1998. p. 141-161.

_____. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. (Org.). *Por que ainda há quem não aprende? A teoria.* Rio de Janeiro: Vozes, 2003. p 21-64.

WATANABE, T.; REYNOLDS, A.; LO, J. J. A fifth grader's understanding of fractions and proportions. In: CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 19., 1995, Recife-PE. *Atas do PME-19*. Recife-PE: UFPE, 1995. v. 3, p. 200-207.

Sandra Magina, doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres, com pós-doutorado na Universidade de Lisboa, Portugal, é professora titular da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e membro do programa de pós-graduação em Educação Matemática da referida Universidade. Publicou vários trabalhos em periódicos.

sandra@pucsp.br

Francisco Brabo Bezerra, doutor em Educação, subárea Educação Matemática, pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), é professor da Faculdade Armando Álvares Penteado (Faap), da Faculdade Integral Cantareira (SP) e da Faculdade Campos Elíseos (SP). Possui trabalhos publicados em anais de eventos.

bezerra-professor@uol.com.br

Alina Galvão Spinillo, doutora em Psicologia do Desenvolvimento pela Universidade de Oxford, Inglaterra, com pós-doutorado em Psicologia Experimental pela Universidade de Sussex, Inglaterra, é professora associada da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Possui trabalhos publicados em periódicos e coletâneas.

alinaspinillo@hotmail.com

Recebido em 17 de setembro de 2008.
Aprovado em 17 de abril de 2009.