

Um panorama teórico das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas

Natalia Nascimben Delmondi^{I, II}

Vinícius Pazuch^{III, IV}

<http://dx.doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.99i253.38616>

Resumo

Apresenta um panorama das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas. Para tal, foi realizada uma revisão sistemática da literatura, em que foram analisadas 24 revistas da área de ensino, classificadas com Qualis A1 pelo portal WebQualis Capes, no quadriênio 2013-2016. Do conjunto delas, selecionaram-se 30 artigos, que foram alocados em 10 temáticas, agrupadas em 4 unidades de análise, de acordo com o contexto de cada uma daquelas. Após a análise dos artigos, sintetizaram-se as unidades, focalizando as temáticas mais exploradas, os aspectos conceituais e as abordagens de ensino em relação às transformações geométricas. Os resultados mostraram que as principais lacunas encontradas quanto ao ensino dessas transformações podem ser minimizadas, direta ou indiretamente, por meio de processos de formação continuada de professores que ensinam matemática.

Palavras-chave: abordagens de ensino; ensino de geometria; revisão sistemática de literatura.

^I Universidade Federal do ABC (UFABC). Santo André, São Paulo, Brasil. *E-mail:* <natalia_delmondi@yahoo.com.br>; <<http://orcid.org/0000-0001-7060-4254>>.

^{II} Graduanda em Ciência e Tecnologia, bolsista de iniciação científica do CNPq pela Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, São Paulo, Brasil.

^{III} Universidade Federal do ABC (UFABC). Santo André, São Paulo, Brasil. *E-mail:* <vinicius.pazuch@ufabc.edu.br>. <<http://orcid.org/0000-0001-6997-1110>>.

^{IV} Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (Ulbra). Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil.

Abstract

A theoretical overview of research trends on the teaching of geometric transformations

This article provides an overview of research trends on the teaching of geometric transformations. Thus, a systematic literature review was conducted, in which 24 teaching-focused journals were analyzed, of which all were rated A1 in Qualis by the WebQualis Capes portal, in the quadrennium 2013-2016. Thirty of those articles were selected and distributed in ten analysis themes, grouped in four units of analysis, according to the context of each of the themes. Following the analysis of the articles, the units were synthesized; with a focus on the most-explored themes, the conceptual aspects and the teaching approaches vis-à-vis the geometric transformations. The results revealed that the main gaps found in the teaching of geometric transformations could be minimized, directly or indirectly, through the processes of continuing education of educators who teach mathematics.

Keywords: teaching approaches; geometry teaching; systematic review of literature.

Introdução

Entende-se ser consenso entre grande parte da população, assim como entre profissionais da educação, a extrema importância do ensino da matemática. É comum à maioria das pessoas, quando se fala em matemática, que a primeira imagem desta se refira à aritmética e à álgebra. Essas, muitas vezes, são consideradas mais importantes, tanto pela população em geral quanto pelos próprios professores, em detrimento de outras áreas, como a geometria. Maia (2014) descreve que a formação dos professores privilegia a álgebra, enquanto a geometria é abordada superficialmente, resultando inclusive no ensino de conceitos equivocados. Como consequência, tal conteúdo geralmente é abordado na etapa final do ano letivo e muitas vezes deixado de lado, em virtude da falta de tempo (Lage, 2008; Marschall; Fioreze, 2015).

Marschall e Fioreze (2015) descrevem que os conceitos da geometria auxiliam no raciocínio visual do estudante e proporcionam a ele a capacidade de relacionar a matemática com o mundo real. Ainda, segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais* – PCN:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o estudante desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. A geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os estudantes costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a

observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (Brasil. MEC, 1998, p. 39).

Logo, com base nos PCN, pode-se dizer que a utilização da geometria para introduzir determinados conceitos e posteriormente realizar a formalização aritmética e algébrica deles se mostra um caminho promissor para que os estudantes compreendam tais conteúdos de outro ponto de vista.

Quanto à geometria, um dos tópicos são as transformações geométricas. De acordo com Wagner (2007), elas podem ser definidas como construções geométricas que conservam certas propriedades em relação às primárias, mas alterando sua posição no plano. As transformações geométricas podem ser isométricas, ou seja, conservam propriedades como distâncias entre pontos, ângulos, perímetros e áreas. Logo, a imagem obtida é congruente à de origem. São transformações isométricas as reflexões em relação a um ponto, as reflexões em relação a uma reta, as rotações e as translações. As transformações geométricas também podem ser homotetias, em que a construção geométrica realizada preserva apenas os ângulos da primária. Logo, a imagem obtida é semelhante à de origem (Wagner, 2007).

Segundo Marschall e Fioreze (2015, p. 3), "as transformações geométricas fazem parte da história da humanidade há muito tempo, antes mesmo do que se possa imaginar". Os primeiros indícios da utilização delas, mesmo que inconsciente, aparecem no período neolítico, por volta de 3000 a.C. Maia (2014) informa que registros do uso das transformações geométricas podem ser encontrados desde a Antiguidade, passando pelos egípcios e gregos, quando, por volta do século V a.C., se observam as primeiras formalizações das propriedades citadas anteriormente. Ainda foram encontrados registros em Constantinopla e nas obras de arte do Renascimento. Atualmente, pode-se citar o artista plástico Escher como um dos maiores representantes do uso das transformações geométricas em obras de arte. Alguns artesanatos brasileiros também as empregam em suas composições.

Como objeto de estudo nas escolas, as transformações geométricas permitem a introdução e a visualização de conceitos como números e medidas, percepção de semelhanças e diferenças e de regularidades ou não entre diversas estruturas, sem a necessidade de realizar sua definição formal prévia. Portanto, contribuem para o desenvolvimento da percepção visual do estudante. Van Hiele (apud Maia, 2014) afirma que uma das primeiras etapas da aprendizagem matemática, é a compreensão geométrica. Assim, o estudante pode apresentar lacunas no entendimento de conceitos posteriores, que são abstratos, se antes não for realizada a apreensão visual. Lage (2008) complementa que o início do raciocínio matemático se dá pela visualização, e a construção desse raciocínio é fundamental para que o estudante desenvolva a capacidade de elaborar a solução de problemas mais complexos futuramente.

Segundo Medeiros e Gravina (2015), os professores consideram as transformações geométricas difíceis de serem trabalhadas, pois a elaboração

dos desenhos com recursos tradicionais, como giz e lousa, lápis e papel, nem sempre é precisa, além de demandar um tempo razoável para que as construções sejam realizadas, e esse tempo nem sempre é disponível.

Atualmente, a sociedade passa por mudanças na esfera tecnológica e social, que se refletem na alteração do perfil dos estudantes e demandam dos professores novas formas de ensinar, mais adequadas às necessidades atuais. O desenvolvimento das tecnologias digitais tem disponibilizado diversos recursos que podem ser utilizados para o ensino das transformações geométricas. Essas tecnologias podem ser aproveitadas, uma vez que a grande maioria dos estudantes já está familiarizada com elas (Marschall; Fioreze, 2015).

Como foi apresentado antes, o ensino das transformações geométricas pode contribuir para a aprendizagem dos estudantes em diversos aspectos, e o conhecimento dos professores acerca desse conceito, as metodologias e os recursos didáticos utilizados para seu ensino podem interferir na forma como ele é compreendido. Assim sendo, este texto tem como objetivo traçar um panorama das tendências de pesquisas presentes em artigos que abordam o ensino de transformações geométricas e traz uma revisão sistemática da literatura, a qual perseguiu esse objetivo pontual.

A seguir, detalham-se as etapas realizadas nessa revisão sistemática de literatura. Posteriormente, abordam-se a descrição e a análise dos dados dos artigos selecionados. Por último, apontam-se as contribuições deste estudo para futuras pesquisas sobre o ensino de transformações geométricas.

Procedimentos metodológicos

A primeira fase da execução deste trabalho foi a seleção de revistas para compor a revisão sistemática da literatura. Foram escolhidas 24 revistas da área de ensino, classificadas com Qualis A1 pelo portal WebQualis Capes, no quadriênio 2013-2016, as quais agregam os principais indexadores (SciELO, *Scopus*, *Web of Science*) de periódicos científicos publicados em nível nacional e internacional. A princípio, optou-se pela verificação de todo o período de publicação de tais revistas, com base nos seguintes descritores e seus correspondentes em outras línguas (*inglês e espanhol*), quando necessário: geometria (*geometry, geometría*); isometria (*isometry, isometría*); transformações geométricas (*geometric transformations, transformaciones geométricas*); transformações isométricas (*isometric transformations, transformaciones isométricas*); simetria (*simmetry, simetría*).

Após essa busca, foram encontrados 3.218 artigos, dos quais 121 foram selecionados pela análise do título e/ou pelo resumo, a fim de verificar se estavam relacionados ao escopo desta pesquisa. Assim, foram descartados os artigos que apresentavam outras abordagens para os descritores utilizados, que não estavam associadas ao ensino da matemática, como geometria molecular, geometria de estruturas cristalinas, geometria do campo magnético, geometria de circuitos elétricos, ou, ainda, que estavam

vinculados ao ensino da matemática, mas não se enquadravam nos objetivos desta pesquisa, como geometria não euclidiana, geometria do gráfico de funções, tarefas de geometria que não envolviam transformações geométricas ou que não as apresentavam como objetivo principal de tais trabalhos, mas como um meio para atingir outros propósitos.

Dos 121 artigos selecionados, 73 foram encontrados pelo descritor "geometria", 4 por "isometria", 13 por "transformações geométricas", 1 por "transformações isométricas", 4 por "simetria" e 26 por mais de um dos descritores. Analisando o período de publicação dos artigos, obtiveram-se a Tabela 1 e o Gráfico 1.

Tabela 1 – Artigos publicados por década

Década	Artigos publicados
1968 – 1977	10
1978 – 1987	5
1988 – 1997	8
1998 – 2007	28
2008 – 2017	70

Fonte: Elaboração própria.

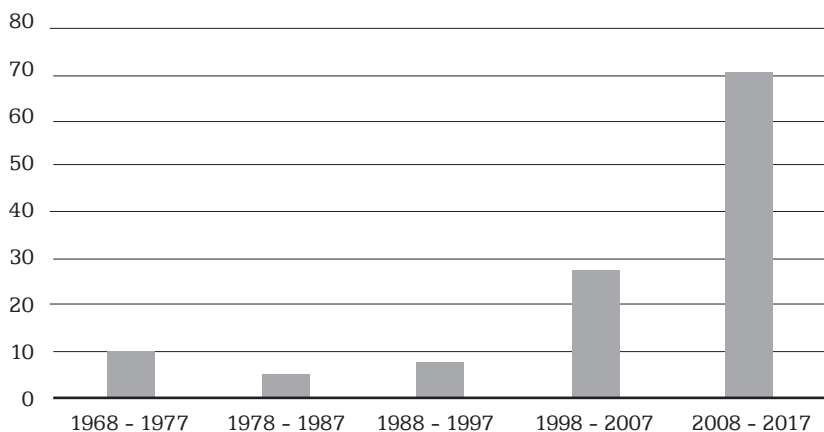


Gráfico 1 – Artigos publicados por década

Fonte: Elaboração própria.

Com base em tais dados, foram selecionados os artigos publicados entre 2008 e 2017 – nesse período o número de publicações sobre o escopo da pesquisa foi mais expressivo – e que apresentavam os descritores *isometria*, *transformações geométricas*, *transformações isométricas*, *simetria* e aqueles com mais de um descritor. Os artigos encontrados apenas pelo descritor geometria foram descartados, pois eles ainda poderiam não ser tão específicos no que se refere ao objetivo central dessa revisão sistemática da literatura. Por fim, dos 121 artigos obtidos na primeira etapa, 30 se

enquadraram nos critérios aqui citados e serão discutidos por meio das unidades de análise determinadas.

Crítérios e determinação das unidades de análise

Após a seleção dos artigos, iniciou-se a análise. Para isso, foram tomados como base os critérios desenvolvidos por Pazuch e Ribeiro (2017, p. 482, grifo do autor):

- a) Questões de investigação ou objetivos: tratam dos propósitos a serem atingidos pelos autores com suas respectivas propostas de pesquisa.
- b) Procedimentos metodológicos: mostram "a natureza da pesquisa, os instrumentos de coleta/produção de dados, as escolhas analíticas e o cenário de investigação".
- c) Resultados: apresentam as conclusões obtidas a partir das questões de investigação e/ou objetivos estabelecidos pelas referidas pesquisas.

Com base na observação de tais critérios em cada um dos artigos selecionados, foi possível categorizá-los em *temáticas de análise*, determinadas com base nas principais características fornecidas pelos artigos, observadas com enfoque nos critérios descritos acima. Assim, determinaram-se dez temáticas de análise e os assuntos de que tratam os artigos:

- 1) *formação continuada do professor*: os artigos apresentam propostas de aprimoramento do conhecimento de professores sobre o ensino de transformações geométricas;
- 2) *atuação e/ou conhecimento do professor*: abordam a forma em que o professor atua na sala de aula ou de lacunas em seu conhecimento e a relação com a aprendizagem dos estudantes;
- 3) *pensamento e/ou conhecimento geométrico dos estudantes*: expõem o conhecimento que os estudantes possuem sobre as transformações geométricas;
- 4) *geometria dinâmica*: apresentam a utilização de recursos tecnológicos para o ensino das transformações geométricas;
- 5) *demonstrações e/ou provas*: abordam recursos ou metodologias utilizadas para a realização de demonstrações e/ou provas em transformações geométricas;
- 6) *livros didáticos*: tratam da abordagem/conteúdo de transformações geométricas nos livros didáticos;
- 7) *materiais manipulativos*: discutem a contribuição da utilização de variados materiais manipulativos para o ensino de transformações geométricas;
- 8) *resolução de problemas*: analisam o ensino das transformações geométricas a partir da resolução de problemas;
- 9) *sequência didática*: utilizam sequências didáticas para o ensino de transformações geométricas; e

10) *elaboração de tarefas*: oferecem discussões sobre a elaboração de tarefas que possam contribuir para o ensino de transformações geométricas.

Alguns artigos apresentaram características que lhes permitiram ser enquadrados em mais de uma temática; no entanto, procurou-se estabelecer a predominante em cada um, sendo ela denominada temática principal. Os temas considerados relevantes, mas não predominantes nos artigos, foram alocados em temáticas secundárias ou terciárias. Logo, 16 artigos foram inseridos em apenas uma temática, enquanto 14, em duas ou mais. Salienta-se que essas foram as temáticas predominantes em cada um dos artigos, embora eles possuam alguma discussão sobre assuntos relacionados a outras, diferentes daquelas em que foram enquadrados.

O Quadro 1 apresenta as temáticas nas quais foram alocados os 30 artigos.

Quadro 1 – Temáticas de análise

(continua)

Título	Autor(es)	Temática de análise (predominância)
<i>Uma experiência de formação continuada com professores de Arte e Matemática no ensino de Geometria</i>	Santos e Bicudo (2015)	Formação continuada do professor (única)
<i>Mediational activities in a dynamic geometry environment and teachers' specialized content knowledge</i>	Alqahtani e Powell (2017)	Atuação e/ou conhecimento do professor (secundária)
<i>The same geometry textbook does not mean the same classroom enactment</i>	Thompson e Senk (2014)	Atuação e/ou conhecimento do professor (principal)
<i>Characterizing questions and their focus when pre-service teachers implement dynamic geometry tasks</i>	Hollebrands e Lee (2016)	Atuação e/ou conhecimento do professor (principal)
<i>Prospective Middle School mathematics teachers' preconceptions of geometric translations</i>	Yanik (2011)	Atuação e/ou conhecimento do professor (única)
<i>Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation</i>	Yanik e Flores (2009)	Atuação e/ou conhecimento do professor (única)
<i>Symmetry and rotation skills of prospective elementary Mathematics teachers</i>	Turgut, Yenilmez e Anapa (2014)	Atuação e/ou conhecimento do professor (única)

Quadro 1 – Temáticas de análise

(continuação)

Título	Autor(es)	Temática de análise (predominância)
<i>The effect of two-dimensional and stereoscopic presentation on Middle School students' performance of spatial cognition tasks</i>	Price e Lee (2009)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (única)
<i>Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment</i>	Ng e Sinclair (2015)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (principal)
<i>Middle-school students' concept images of geometric translations</i>	Yanik (2014)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (única)
<i>Students' conceptions of reflection: Opportunities for making connections with perpendicular bisector</i>	Dejarnette, González, Deal e Lausell (2016)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (única)
<i>Zigzagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a mathematical working spaceframed study concerning cognition and affect</i>	Gómez-Chacón, Albaladejo e López (2016)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (principal)
<i>Adapting Japanese lesson study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study</i>	Moss, Hawes, Naqvi e Caswell (2015)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (secundária)
<i>Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany</i>	Heinze, Cheng, Ufer, Lin e Reiss (2008)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (principal)
<i>Students' use of technological tools for verification purposes in geometry problem solving</i>	Papadopoulos e Dagdilelis (2008)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (principal)
<i>Knowledge use in the construction of geometry proof by Siri Lankan students</i>	Chinnappan, Ekanayake e Brown (2012)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (principal)
<i>New opportunities in geometry education at the Primary School</i>	Sinclair e Bruce (2015)	Pensamento e/ ou conhecimento geométrico do estudante (única)

Quadro 1 – Temáticas de análise

(continuação)

Título	Autor(es)	Temática de análise (predominância)
<i>A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler</i>	Amado, Sanchez e Pinto (2015)	Geometria dinâmica (principal)
<i>O papel do professor e do estudante frente ao uso de um software de geometria interativa: iGeom</i>	Isotani e Brandão (2013)	Geometria dinâmica (única)
<i>Mathematical problem solving with technology: the techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra</i>	Jacinto e Carreira (2016)	Geometria dinâmica (secundária)
<i>Comparison of traditional instruction on reflection and rotation in a Nepalese High School with a ICT-rich, student-centered, investigative approach</i>	Mainali e Heck (2015)	Geometria dinâmica (única)
<i>Mediational activities in a dynamic geometry environment and teachers' specialized content knowledge</i>	Alqahtani e Powell (2017)	Geometria dinâmica (principal)
<i>Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment</i>	Ng e Sinclair (2015)	Geometria dinâmica (secundária)
<i>An epistemic model of task design in dynamic geometry environment</i>	Leung (2011)	Geometria dinâmica (secundária)
<i>Characterizing questions and their focus when pre-service teachers implement dynamic geometry</i>	Hollebrands e Lee (2016)	Geometria dinâmica (secundária)
<i>Students' use of technological tools for verification purposes in geometry problem solving</i>	Papadopoulos e Dagdilelis (2008)	Geometria dinâmica (terciária)
<i>Zigzagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a mathematical working spaceframed study concerning cognition and affect</i>	Gómez-Chacón, Albaladejo e López (2016)	Geometria dinâmica (secundária)

Quadro 1 – Temáticas de análise

(continuação)

Título	Autor(es)	Temática de análise (predominância)
<i>A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler</i>	Amado, Sanchez e Pinto (2015)	Demonstrações e/ou provas (secundária)
<i>Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany</i>	Heinze, Cheng, Ufer, Lin e Reiss (2008)	Demonstrações e/ou provas (secundária)
<i>Knowledge use in the construction of geometry proof by Siri Lankan students</i>	Chinnappan, Ekanayake, Brown (2012)	Demonstrações e/ou provas (secundária)
<i>Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding</i>	Palha, Dekker, Gravemeijer e Hout-Wolters (2013)	Demonstrações e/ou provas (secundária)
<i>O Movimento da Matemática Moderna e diferentes propostas curriculares para o ensino de Geometria no Brasil e em Portugal</i>	Matos e Silva (2011)	Livros didáticos (única)
<i>The same geometry textbook does not mean the same classroom enactment</i>	Thompson e Senk (2014)	Livros didáticos (secundária)
<i>Possibilidades pedagógicas do uso da imagem fotográfica no livro didático de Matemática</i>	Maciel, Rêgo e Carlos (2017)	Livros didáticos (única)
<i>Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino da simetria e artes visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental</i>	Santos e Teles (2012)	Livros didáticos (única)
<i>Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da Matemática</i>	Murari (2011)	Materiais manipulativos (única)
<i>Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego</i>	Healy e Fernandes (2011)	Materiais manipulativos (única)
<i>Mathematical problem solving with technology: the techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra</i>	Jacinto e Carreira (2016)	Resolução de problemas (principal)

Quadro 1 – Temáticas de análise

(conclusão)

Título	Autor(es)	Temática de análise (predominância)
<i>Students' use of technological tools for verification purposes in geometry problem solving</i>	Papadopoulos e Dagdilelis (2008)	Resolução de problemas (secundária)
<i>Simetria no Ensino Fundamental através da resolução de problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula</i>	Vieira, Paulo e Allevato (2013)	Resolução de problemas (principal)
<i>Simetria no Ensino Fundamental através da resolução de problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula</i>	Vieira, Paulo e Allevato (2013)	Sequência didática (secundária)
<i>A simetria nas aulas de Matemática: uma proposta investigativa</i>	Lopes, Alves e Ferreira (2015)	Sequência didática (única)
<i>An epistemic model of task design in dynamic geometry environment</i>	Leung (2011)	Elaboração de tarefas (principal)
<i>Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding</i>	Palha, Dekker, Gravemeijer e Hout-Wolters (2013)	Elaboração de tarefas (principal)
<i>Adapting Japanese lesson study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study</i>	Moss, Hawes, Naqvi e Caswell (2015)	Elaboração de tarefas (principal)

Fonte: Elaboração própria.

Após a determinação das temáticas de análise, observou-se que algumas delas possuíam aspectos comuns e poderiam ser agrupadas em conjuntos que foram denominados “unidades de análise”. Sendo assim, as dez temáticas foram agrupadas em quatro unidades de análise:

- 1) Processos formativos, práticas docentes e conhecimentos do professor (7 artigos): formação continuada do professor (1 artigo) e atuação e/ou conhecimento do professor (6 artigos).
- 2) Pensamento geométrico e relação com os estudantes (10 artigos): pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante (10 artigos).
- 3) Conhecimentos geométricos e tecnológicos (14 artigos): geometria dinâmica (10 artigos) e demonstrações e/ou provas (4 artigos).
- 4) Recursos didáticos e estratégias metodológicas (14 artigos): livros didáticos (4 artigos), materiais manipulativos (2 artigos), resolução de problemas (3 artigos), sequência didática (2 artigos) e elaboração de tarefas (3 artigos).

Essa categorização permitiu a observação de um panorama das tendências de pesquisa em transformações geométricas e seu ensino nos últimos dez anos. Essas tendências serão discutidas posteriormente com base nos critérios adotados para a determinação das temáticas de pesquisa e, em consequência, das unidades de análise.

Resultados e discussão

Após a categorização dos artigos descrita acima, iniciou-se um estudo sobre eles. Buscaram-se aproximações e distanciamentos entre as pesquisas, bem como perspectivas diferentes de tratamento e/ou ensino das transformações geométricas. Esse estudo foi executado dentro de cada unidade de análise, comparando os artigos alocados e estabelecendo assim uma síntese de cada uma delas.

Posteriormente, foi possível dialogar com cada uma das sínteses, para que finalmente pudessem ser apontadas as principais tendências das pesquisas que apresentam como tema as transformações geométricas e seu ensino. Os resultados obtidos na primeira unidade são apresentados a seguir.

Processos formativos, prática docente e/ou conhecimentos do professor

Entre as unidades de análise estabelecidas, esta foi a que apresentou o menor número de artigos alocados (sete), sendo um referente à *formação continuada do professor* e os demais, à *atuação e/ou ao conhecimento do professor*.

O artigo que trata da *formação continuada do professor* foi inserido apenas nesta temática de análise, ou seja, tem este tópico como objetivo, assim como três artigos que abordam a *atuação e/ou o conhecimento do professor*. Dentre os demais artigos que tratam desta última temática, em dois deles, ela é considerada principal, ou seja, utilizam-se meios secundários para se atingir o objetivo descrito, e em um é considerada secundária, em que a temática descrita é um meio para se atingir outro objetivo mais relevante.

O estudo referente à *formação continuada do professor*, de Santos e Bicudo (2015), relatou uma experiência com docentes de matemática e de arte, da educação básica, tendo como foco o ensino de geometria por meio das pavimentações do plano, desenvolvido mediante curso de formação continuada. A partir disso, foram apresentadas e discutidas propostas de atividades que trabalham o tema das pavimentações no plano. Santos e Bicudo (2015) constataram que essas atividades levaram os professores a dedicar uma maior atenção ao conteúdo abordado, assim como aos métodos que utilizam para abordá-lo em sala de aula. As autoras indicam que, para o sucesso do trabalho, é necessário um engajamento de todas as esferas da instituição de ensino, desde os professores até a direção.

O artigo de Santos e Bicudo (2015) é o único, entre os que são objeto de estudo desta pesquisa, com a proposta colocada de maneira clara e objetiva, o que mostra uma lacuna nessa área de investigação, sendo a formação continuada de professores uma temática com potencial para o desenvolvimento de estudos futuros.

Os artigos que tratam da *atuação e/ou do conhecimento do professor* como objetivo único são de Turgut, Yenilmez e Anapa (2014), de Yanik (2011) e de Yanik e Flores (2009).

O primeiro deles analisou a atuação de um único indivíduo, um futuro professor, mediante seu conhecimento das translações geométricas. Nessa pesquisa, foram observados conhecimentos prévios, experiências de ensino e entrevistas clínicas baseadas em tarefas e episódios de ensino do futuro professor. Após tais observações, os autores concluíram que o conhecimento desse futuro professor acerca das translações geométricas foi ampliado durante a pesquisa, por meio de reflexões propostas a ele sobre o conteúdo que apresentava aos estudantes, sobretudo aquele em que o docente ainda possuía dificuldades.

O artigo de Yanik (2011) também analisa o conhecimento de futuros professores quanto às translações geométricas, mas em uma escala mais ampla, sem se limitar a apenas um indivíduo, mas envolvendo um grupo. A pesquisa foi realizada de forma semelhante à de Yanik e Flores (2009): os dados foram coletados mediante respostas dos participantes às tarefas que foram apresentadas durante entrevistas. Os resultados, semelhantes ao anterior, mostraram que os futuros professores tiveram dificuldades em reconhecer, descrever, executar e representar as translações geométricas.

Turgut, Yenilmez e Anapa (2014) seguem a mesma linha de pesquisa, delineando o conhecimento de futuros professores acerca de simetrias e rotações. A exemplo dos trabalhos anteriores, esse foi feito por entrevistas e proposição de tarefas aos participantes e também apresentou resultados similares, em que os indivíduos dominaram os conceitos básicos de simetria e reflexão, mas, quando tais temas necessitaram de aprofundamento e conceituação mais complexa, os futuros professores não conseguiram solucionar os problemas propostos.

Entre os trabalhos que apresentam a *atuação e/ou o conhecimento do professor* como objetivo principal, há os artigos de Thompson e Senk (2014) e de Hollebrands e Lee (2016).

Thompson e Senk (2014) observaram a forma como diferentes professores utilizam o mesmo livro didático para ensinar o mesmo conteúdo – o conceito de congruência de triângulos e sua verificação pelas transformações geométricas. Logo, o trabalho também tem o intuito de refletir sobre a atuação dos docentes em sala de aula, mas com foco para o uso do livro didático, sendo esse o objetivo secundário desta pesquisa. Os autores analisaram a maneira como diversos professores utilizaram o material proposto para ensinar o conteúdo desejado, e a discussão desses métodos de ensino entre os professores ofereceu-lhes novas possibilidades e ampliou seu conhecimento sobre a forma como eles podem ensinar um mesmo conteúdo com base em um mesmo material.

Ainda sobre a atuação de futuros professores, Hollebrands e Lee (2016) analisaram como eles propunham tarefas relacionadas ao uso das transformações geométricas para estudar as propriedades dos triângulos, empregando *softwares* de geometria dinâmica, que é o objetivo secundário desta pesquisa. Por faltar aos futuros professores conhecimento matemático e tecnológico, eles não conseguiram explicitar aos estudantes os objetivos das tarefas propostas, o que não lhes possibilitou um aproveitamento maior delas.

O último artigo desta unidade de análise, de Alqahtani e Powell (2017), também se refere à atuação dos professores com *software* de geometria dinâmica, mas o uso desse é mais relevante para os autores que a atuação dos professores; logo, esse é o objetivo secundário deste artigo. Assim, essa pesquisa analisou como os *softwares* de geometria dinâmica podem contribuir para a atuação dos professores em sala de aula, auxiliando no ensino de conceitos como pontos notáveis do triângulo, além de outros, por exemplo, mediana e ponto médio de outras formas geométricas, por meio de transformações geométricas. Após a realização de um curso *on-line*, os resultados mostraram que o conhecimento dos professores sobre o uso de *softwares* de geometria dinâmica pode contribuir para que o ensino dos conceitos desejados seja mais produtivo. Salienta-se que o artigo de Alqahtani e Powell (2017) também se refere à formação continuada de professores, já que foi proposto a eles um curso *on-line*. No entanto, não é enfatizado pelos autores esse aspecto, mas sim a relação dos docentes com o *software*.

Síntese da Unidade

Após o estudo desta unidade de análise, destaca-se que os artigos revelam que os futuros professores possuem um conhecimento superficial sobre transformações geométricas, e os professores já atuantes precisam aprofundar seus conhecimentos sobre esse conteúdo. Apesar de Alqahtani e Powell (2017) abordarem implicitamente a formação continuada de professores, evidencia-se a necessidade de mais trabalhos como o de Santos e Bicudo (2015), que possam fornecer aos professores em atuação propostas de formação continuada para que aprofundem seus conhecimentos e utilizem novas abordagens de ensino sobre transformações geométricas; e, aos futuros professores, possibilitem aprofundar a relação com elas. Esta é uma área em potencial para futuros trabalhos, já que não foi encontrado um número expressivo de artigos que tratam desse tema.

Pensamento geométrico e relação com os estudantes

Nesta unidade de análise, está alocada apenas uma temática: o *pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante*. Dos dez artigos presentes, quatro são direcionados apenas a essa temática; cinco se

enquadram em mais de uma, mas apresentam essa como principal; e apenas um discute o pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante como temática de análise secundária.

O primeiro dos quatro artigos que tem o pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante como temática única é de Price e Lee (2009) e investigou como se dá o desempenho de estudantes no trabalho com representações bidimensionais, tridimensionais e estereoscópicas, por meio da aplicação de três tipos de tarefas de cognição espacial. Tais tarefas consistiam em representações de sólidos geométricos em uma, duas ou três dimensões. Os alunos deveriam, em outra série de imagens, identificar quais delas correspondiam a uma rotação da imagem exposta inicialmente. Os resultados mostraram que os estudantes do ensino médio apresentaram mais dificuldade em realizar manipulações mentais estereoscópicas em imagens 3D do que em 2D e que ela aumentava de acordo com a complexidade da imagem e do número de manipulações mentais necessárias para realizar a associação com as imagens iniciais, além de um tempo maior para a execução das tarefas propostas. Price e Lee (2009) destacam que os professores e os elaboradores de currículo deveriam adicionar a ele tarefas cognitivas que utilizem visualizações estereoscópicas que requeiram rotações mentais.

O segundo artigo é de Yanik (2014), que apontou conhecimentos de alunos de 6º ano sobre transformações geométricas – analisou se os conceitos podiam ser formalizados pelos estudantes e que linhas de raciocínio eles utilizaram para estabelecê-los. As informações foram coletadas, assim como no artigo anterior, por meio de formulários com tarefas e questões conceituais e entrevistas com estudantes e professores. Yanik (2014) concluiu que os alunos possuíam duas concepções de translações geométricas: a translação por si só ou a associada à rotação; que os níveis de compreensão dos conceitos sobre essas transformações geométricas variavam de acordo com o estudante; e que os conceitos eram majoritariamente relacionados com livros didáticos e outros materiais utilizados em sala de aula e com elementos do cotidiano dos alunos.

Também com temática de análise unicamente direcionada para o pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante, Dejarnette et al. (2016) aplicaram tarefas aos alunos, com a proposta de verificar como os conceitos de simetria interferem na aprendizagem do de bissetriz perpendicular. As atividades tiveram como intuito incitar o conhecimento prévio dos estudantes sobre simetria e reflexão e, posteriormente, provocar o uso desses conteúdos para trabalhar o conceito de bissetriz perpendicular. Embora os estudantes tenham usado concepções particulares e diferentes das esperadas pelos autores para elaborar esse conceito, os resultados indicam que houve uma mudança no raciocínio dos alunos, o que permitiu elucidar o uso da bissetriz perpendicular.

O último artigo que se refere unicamente ao pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante é de Sinclair e Bruce (2015) e discutiu a importância de apresentar a geometria e as transformações geométricas a alunos dos anos iniciais do ensino fundamental e apontar

quais contribuições esse contato no início da vida escolar pode trazer futuramente. Para isso, as autoras apresentaram um panorama histórico do ensino de geometria nas escolas e dos tópicos abordados, bem como o papel das tecnologias digitais no ensino dessa disciplina. As reflexões realizadas por Sinclair e Bruce (2015) mostraram que há um potencial crescente para a aprendizagem de geometria nos anos iniciais, com destaque para as transformações geométricas. Ainda persiste a discussão, entre os pesquisadores em educação matemática, do porquê e de quais conteúdos devem ser ensinados nessa faixa etária.

Os cinco artigos discutidos a seguir apresentam o *pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante* como temática principal, utilizando-se de outros recursos para abordar o objeto de estudo em destaque.

Sendo assim, Ng e Sinclair (2015) investigaram como os estudantes se apropriam do conceito de simetria por meio da reflexão, utilizando um ambiente de geometria dinâmica, sendo esse o objetivo secundário do seu artigo. Assim como, na maioria dos textos desta unidade de análise, foram aplicadas tarefas capazes de discutir o pensamento dos estudantes sobre a simetria por reflexão, porém com *softwares* de geometria dinâmica. Ng e Sinclair (2015) constataram que, por meio da utilização do *software*, os alunos explicitaram e sanaram dúvidas sobre seus conhecimentos de simetria por reflexão e de visualização das propriedades das transformações geométricas em questão.

O trabalho de Gómez-Chacón, Albaladejo e López (2016) também apresenta como objetivo secundário o uso de ambientes tecnológicos para a aplicação de tarefas, mas com intuito de auxiliar no pensamento geométrico do estudante e na formalização dos conceitos das transformações geométricas. As autoras pontuam que o uso do *software*, além de auxiliar na visualização e na formalização dos conceitos, tornou os estudantes mais engajados em suas atividades, o que aprimorou seu pensamento geométrico e a aprendizagem do uso das transformações geométricas para as demonstrações. Além disso, enfatizam que a interação entre o estudante e o professor é fundamental nesse processo, pois, mediante breves questões, os docentes instigam os alunos a buscarem as soluções para os problemas propostos.

Ainda com relação ao pensamento geométrico e às provas, há o artigo de Heinze *et al.* (2008). A pesquisa analisou o modo como diferentes técnicas e materiais, em contextos e locais distintos, podem auxiliar no desenvolvimento dos conceitos de demonstração e provas e no pensamento geométrico dos estudantes. Em termos de resultados, após a análise das tarefas aplicadas pelos professores e do conteúdo apreendido pelos alunos, apesar da utilização de estratégias e materiais diferentes, o uso dos conceitos das transformações geométricas revelou-se o meio mais eficaz para a realização de provas geométricas.

Seguindo a mesma linha de pesquisa, Papadopoulos e Dagdilelis (2008) visaram apresentar as soluções que os estudantes dos anos iniciais buscam, trabalhando com *softwares* de geometria dinâmica, para resolver

problemas não triviais de geometria, ou seja, os autores observaram como se desenvolve o pensamento geométrico desses estudantes em um *software* de geometria dinâmica e como ele pode auxiliá-los na resolução de problemas. Dessa forma, esse é o único artigo que se enquadrou em três temáticas de análise distintas. Assim como a maioria dos demais trabalhos discutidos nesta unidade, a resolução pelos estudantes das tarefas propostas mostrou que, inconscientemente, eles utilizaram as transformações geométricas para apresentar suas verificações. Ainda, o uso do *software* favoreceu e facilitou o processo de verificação e de validação dos resultados, o que não ocorria quando os exercícios eram resolvidos apenas com o uso do papel e do lápis.

O artigo de Chinnappan, Ekanayake e Brown (2012) encerra os artigos que possuem como temática principal o *pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante* e também trata do conhecimento de transformações geométricas dos alunos direcionado à resolução de problemas com demonstrações e/ou provas. Dessa forma, os autores buscaram mostrar como os conhecimentos e as habilidades de manipulação dos conceitos de transformações geométricas podem auxiliar nos problemas de provas geométricas. Para tanto, eles examinaram nos estudantes três variáveis independentes: conhecimento de conteúdo de geometria, habilidades gerais de resolução de problemas e habilidades de pensamento geométrico. Concluíram que as três vertentes descritas são necessárias, em maior ou menor escala, e estão inter-relacionadas, quando se trata do desenvolvimento de provas mediante transformações geométricas.

O último trabalho que compõe esta unidade de análise é de autoria de Moss *et al.* (2015). Nele, o pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante é considerado secundário, pois a pesquisa enfatiza a elaboração de tarefas – utilizada como um instrumento de validação do trabalho desenvolvido –, ao invés da resposta dos estudantes a elas. Logo, os autores discutem a adaptação, nos anos iniciais do ensino fundamental, de tarefas de transformações geométricas avançadas, que desenvolvam o pensamento geométrico dos estudantes. A verificação da eficácia de tais tarefas se deu por meio da sua aplicação a alunos dessa etapa de ensino, e os resultados mostraram que as adaptações foram bem-sucedidas e proporcionaram aos estudantes um contato mais precoce com os conceitos das transformações geométricas, facilitando assim o aprofundamento desse tema futuramente. Além disso, os professores se sentiram mobilizados a ampliar o trabalho com conteúdos de geometria na educação básica.

Síntese da Unidade

Estabelecendo um panorama geral desta unidade de análise, pode-se observar que o *pensamento e/ou conhecimento geométrico do estudante* é um tema considerado relevante e é predominante nas pesquisas em que aparece, sendo secundário em apenas um dos artigos. Os resultados desses trabalhos, em geral, mostram que utilizar as transformações geométricas para demonstrações e/ou provas amplia o entendimento dos

estudantes sobre esse assunto e desenvolve neles habilidades que podem ser empregadas em outros conteúdos da matemática e até mesmo em outras disciplinas. Além disso, a utilização de recursos como materiais didáticos, relações com o cotidiano dos estudantes e, em especial, o uso de *softwares* de geometria dinâmica, potencializa a compreensão e a apropriação pelos alunos dos conceitos das transformações geométricas. Ainda, é possível constatar que este não é um conteúdo predominante nos currículos escolares, em especial, nos anos iniciais do ensino fundamental. Mas, se fosse tratado com uma relevância maior, poderia favorecer a aprendizagem dos estudantes em outras áreas de conhecimento, como a álgebra e os números.

Conhecimentos geométricos e tecnológicos

Esta unidade abriga duas temáticas de análise: geometria dinâmica e demonstrações e/ou provas.

A *geometria dinâmica* é a temática na qual se enquadram mais artigos: dez no total. Destes, apenas em dois essa temática é considerada única e, em outros dois, ela é principal. Portanto, nesses artigos, é enfatizada a utilização do *software* para auxiliar na compreensão dos conceitos das transformações geométricas. Entre os demais artigos, em cinco essa temática é considerada secundária e, em um, terciária – o que os autores enfatizam não é o uso do software em si, mas a aprendizagem de um determinado conceito, em que o software é colocado apenas como um meio para se atingir outro objetivo mais relevante.

Os artigos nos quais a *geometria dinâmica* é o único objeto de estudo dos pesquisadores são de Isotani e Brandão (2013) e de Mainali e Heck (2015). Isotani e Brandão (2013) discutem o protagonismo da geometria interativa no ensino de geometria e apresentam as vantagens que ela traz tanto para os professores quanto para os estudantes. Em termos metodológicos, foram aplicadas a alunos de licenciatura em matemática e de cursos de extensão atividades que consistiam no uso das transformações geométricas para a construção de polígonos e outras formas geométricas e para o estudo das suas propriedades. Os resultados mostraram que a utilização de geometria interativa proporcionou uma maior produtividade em sala de aula, pois forneceu aos professores novos meios para a elaboração e a avaliação das atividades e, aos estudantes, maior envolvimento nas atividades e novas possibilidades de aprendizagem.

Já Mainali e Heck (2015) buscaram comparar a aprendizagem e o ensino dos conceitos de reflexão e rotação em uma abordagem tradicional e com o uso de um *software* de geometria dinâmica. Os autores verificaram que conceitos os estudantes já possuíam sobre reflexão e rotação e, posteriormente, propuseram uma abordagem para tratar tais temas com o uso de um *software* de geometria dinâmica, a fim de mostrar se esta

esclareceria e/ou aprofundaria os conhecimentos prévios dos alunos. Após tal processo, verificou-se que, apesar de os estudantes terem apresentado certa dificuldade para trabalhar com o software, ainda assim os resultados foram positivos, mostrando que a compreensão dos alunos foi maior com o uso do *software* de geometria dinâmica e, portanto, ele é mais eficaz que uma abordagem tradicional.

Entre os artigos que apresentam a *geometria dinâmica* como temática principal, há os trabalhos de Amado, Sanchez e Pinto (2015) e de Alqahtani e Powell (2017), já discutido nas unidades de análise anteriores.

Amado, Sanchez e Pinto (2015) analisaram como o *software* GeoGebra pode contribuir para o ensino de geometria, utilizando-se das transformações geométricas para obter os pontos notáveis do triângulo, realizar a demonstração das suas propriedades e então definir a Reta de Euler. Mediante as atividades propostas aos estudantes, os autores constataram que o uso do *software* os motivou e permitiu que manipulassem as figuras, facilitando o desenvolvimento de demonstrações.

Dos cinco artigos em que a *geometria dinâmica* é considerada secundária, três já foram discutidos nas unidades de análise anteriores: os trabalhos de Hollebrands e Lee (2016), Gómez-Chacón, Albaladejo e López (2016) e Ng e Sinclair (2015). Portanto, serão apresentados a seguir os trabalhos de Jacinto e Carreira (2016) e de Leung (2011).

Jacinto e Carreira (2016) buscaram verificar como estudantes de 13 anos recorrem ao uso de ferramentas digitais para a resolução de problemas matemáticos e qual a eficácia de resolução de tais problemas com o uso de softwares de geometria dinâmica. As tarefas propostas pelas autoras são direcionadas para o ensino de geometria, apesar de abordar diversos conceitos da matemática. Logo, era necessário o uso das transformações geométricas para solucioná-las, mesmo que esse fosse um conceito implícito a ser utilizado, e não o foco principal da atividade. Os resultados mostraram que as soluções apresentadas pelos estudantes são provenientes da combinação de habilidades tecnológicas e matemáticas e, nesse caso, por dominarem os recursos tecnológicos, os alunos identificaram-se com a ferramenta, o que favoreceu o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas.

Por outro lado, Leung (2011) utilizou os recursos tecnológicos não para auxiliar na resolução de problemas, mas para contribuir para a elaboração de tarefas matemáticas, sendo esse o objetivo principal de seu artigo. Assim, o autor estabeleceu alguns critérios considerados essenciais para essa elaboração e a adaptação deles às tarefas, que nesse caso consistiam na construção de quadriláteros e na análise da sua simetria, para que sejam realizadas com o uso de *softwares* de geometria dinâmica. Leung (2011) destaca que tais tarefas são capazes de contribuir para que os estudantes compreendam aspectos abstratos da matemática, sendo esse um método alternativo para ampliar a apropriação do conhecimento desse campo.

Como último artigo desta temática de análise, temos o trabalho de Papadopoulos e Dagdilelis (2008), em que o uso de *softwares* de geometria

dinâmica foi considerado a temática terciária do artigo. Como ele já foi apresentado nas unidades de análise anteriores, não será discutido novamente.

A outra temática alocada nesta unidade de análise é *demonstrações e/ou provas*, na qual se enquadram quatro artigos, e todos eles tiveram esta temática considerada como secundária. Três desses trabalhos já foram discutidos anteriormente: os de Amado, Sanchez e Pinto (2015), Chinnappan, Ekanayake e Brown (2012) e Heinze *et al.* (2008).

O último trabalho a ser exposto nesta unidade de análise é de Palha *et al.* (2013), que discutiram a elaboração de tarefas que possam contribuir para a construção do pensamento abstrato dos estudantes, a fim de auxiliar em atividades que envolvam provas geométricas com base no uso das transformações geométricas. Ainda, os autores analisam como se dá o processo de aprendizagem desses alunos quando estão realizando tais atividades. Os resultados mostraram que as tarefas elaboradas contribuíram para o processo de aprendizagem dos estudantes e para o desenvolvimento do seu pensamento abstrato.

Síntese da Unidade

Analisando os resultados das pesquisas discutidas na temática de análise de *geometria dinâmica*, pode-se afirmar que os *softwares* dessa natureza têm uma contribuição significativa e apresentam retornos positivos quanto ao seu uso para o ensino das transformações geométricas, o que se dá, muitas vezes, pelo fato de os estudantes da atualidade terem uma maior identificação com ferramentas tecnológicas. Logo, os *softwares* de geometria dinâmica são recursos com inúmeras possibilidades de aplicação e vêm sendo amplamente utilizados, estando cada vez mais presentes nas pesquisas e nas propostas de alternativas para o ensino de geometria. Isso justifica o fato de esta temática ser a que possui o maior número de artigos, mas ter sido majoritariamente secundária, já que a geometria dinâmica é um recurso utilizado para se atingir outros objetivos.

Observando os trabalhos da temática de análise de *demonstrações e/ou provas*, é possível detectar que as demonstrações e/ou provas em geometria são processos para validar a utilização de diversos recursos metodológicos, o que explica o fato de todos os artigos que se enquadram nessa temática terem sido secundários. Além disso, é possível considerar que esse é um conteúdo no qual a maioria dos estudantes encontra dificuldades. Então, se os recursos propostos se mostram potenciais no ensino de demonstrações e/ou provas em geometria, podem também contribuir em outros conteúdos.

Por outro lado, percebe-se que a geometria dinâmica, sendo um recurso cada vez mais difundido, só foi utilizada para a resolução de problemas de demonstração e/ou provas em apenas uma pesquisa, a de Amado, Sanchez e Pinto (2015). Portanto, a utilização de *softwares* de geometria dinâmica para fins de demonstrações e/ou provas se mostra como um campo em potencial para trabalhos futuros.

Recursos didáticos e estratégias metodológicas

A última unidade de análise a ser discutida apresenta os recursos e as estratégias utilizadas pelos professores para otimizar o ensino das transformações geométricas. Sendo assim, ela abriga o maior número de temáticas de análise (cinco).

A primeira delas trata do conteúdo de transformações geométricas nos *livros didáticos*. Dos quatro artigos alocados nessa temática, três a apresentam como única e um, como secundária.

O livro didático como temática única é abordado por Matos e Silva (2011). Os autores propuseram uma reflexão sobre como são elaboradas as propostas curriculares para o ensino de geometria, mediante análise e comparação do conteúdo de livros didáticos do Brasil e de Portugal. O material escolhido para tal análise é direcionado ao que corresponde atualmente no Brasil aos anos finais do ensino fundamental (do 6º ao 9º anos), pois essa seria uma etapa em que já se poderia introduzir o estudo das transformações geométricas. Matos e Silva (2011) refletiram que a elaboração dos currículos nos livros didáticos não é padronizada: mesmo havendo recomendações internacionais, elas são flexíveis e permitem que os currículos se adaptem às necessidades locais e à concepção de cada autor. Os autores destacam que foi possível apontar um despreparo dos professores para ensinar o novo conteúdo de geometria proposto pelo Movimento da Matemática Moderna, o que os levou a abordar superficialmente e até mesmo a excluir tais conteúdos de suas aulas.

Direcionando para o livro didático um olhar mais aprofundado do que apenas ao conteúdo a ser ensinado, Maciel, Rêgo e Carlos (2017) analisaram como as imagens podem contribuir para o ensino de matemática, em especial do conteúdo de simetria, nos anos finais do ensino fundamental. Os autores concluíram que, quando as imagens são colocadas nos livros com um propósito de auxiliar o estudante na apropriação do conteúdo, complementando a teoria, sem função apenas decorativa, há uma contribuição significativa para o ensino dos conceitos de simetria.

Santos e Teles (2012) analisaram atividades que relacionam simetria e artes visuais em livros didáticos de matemática. Em contrapartida aos trabalhos de Maciel, Rêgo e Carlos (2017) e Matos e Silva (2011), o olhar de Santos e Teles (2012) foi direcionado para materiais destinados aos anos iniciais do ensino fundamental. As autoras detectaram que as artes visuais presentes nos livros didáticos podem contribuir para o entendimento e a elaboração de conceitos intuitivos sobre simetria pelos estudantes. Para que, de fato, ocorra a aprendizagem desse conteúdo, é necessária uma formalização prévia desses conceitos, desde os anos iniciais do ensino fundamental.

A pesquisa em que o livro didático é considerado como temática secundária foi desenvolvida por Thompson e Senk (2014) e já foi apresentada nas unidades de análise anteriores.

Outra temática de análise que trata de recursos didáticos e estratégias metodológicas é o uso de materiais manipulativos para o ensino das transformações geométricas. Nessa temática, foram alocados dois artigos, e ambos a tomam como única.

O primeiro desses artigos é de Murari (2011) e teve como objetivo ampliar as possibilidades de artefatos que possam contribuir para o ensino das transformações geométricas. Assim, o autor propõe o uso de diversos materiais, como caleidoscópios, sólidos geométricos sobre espelhos, origamis e *softwares* educacionais, por meio dos quais foi possível explorar conceitos como simetria, reflexão e rotação, além das pavimentações em um plano. Com base nisso, observou-se que o uso de tais materiais pode promover uma aprendizagem mais significativa dos conceitos das transformações geométricas.

O segundo trabalho que se vincula ao uso de materiais manipulativos é direcionado a um público específico, ou seja, a estudantes cegos. Healy e Fernandes (2011) elaboraram materiais manipuláveis que auxiliam na compreensão dos conceitos de simetria e reflexão por esses indivíduos. As autoras constataram que a utilização desses materiais por estudantes cegos não só facilita o entendimento dos conceitos desejados, como os coloca em uma posição menos desigual em relação a estudantes que não possuem essa deficiência, oportunizando que alunos cegos adquiram tal conhecimento.

Outra temática que trata de recurso didático ou estratégia metodológica a ser discutida nesta unidade de análise é o uso da *resolução de problemas* para o ensino de geometria. Nessa temática de análise, encontram-se três artigos, sendo ela, em dois deles, principal e, em um, secundária.

Um dos trabalhos que apresentam a resolução de problemas como temática principal é de Vieira, Paulo e Allevato (2013). Os autores propuseram uma sequência didática, trabalhada por meio da resolução de problemas, para auxiliar na compreensão dos conceitos de simetria por estudantes do ensino fundamental. Após a aplicação da sequência didática, os autores afirmaram que a aprendizagem dos alunos sobre a simetria foi potencializada pela resolução de problemas, favorecendo não só a identificação das propriedades desejadas, mas também contribuindo para que os estudantes pudessem fundamentar argumentações sobre as investigações realizadas.

O outro artigo que considera a resolução de problemas como temática principal é de Jacinto e Carreira (2016), que já foi discutido anteriormente, assim como o trabalho de Papadopoulos e Dagdilelis (2008), que emprega essa temática como secundária.

Ainda tratando de recursos didáticos e estratégias metodológicas, tem-se como temática de análise o uso ou a elaboração de *sequências didáticas* para o ensino de geometria. Dos dois artigos alocados nessa temática, um deles a apresenta como única e o outro, como secundária, sendo esta a pesquisa discutida anteriormente, de Vieira, Paulo e Allevato (2013).

O trabalho que apresenta a sequência didática como temática única é de Lopes, Alves e Ferreira (2015). Os autores, após traçarem um panorama de como vem sendo desenvolvida a didática da matemática e do ensino de simetria, propuseram uma sequência de atividades relacionadas a este, que possa ser aplicada em salas com muitos estudantes e utilize materiais acessíveis para tal. Após a atividade, foi possível observar que os alunos se sentiram desafiados e motivados e desenvolveram a criatividade enquanto buscavam as soluções para os problemas propostos.

A última temática que compõe esta unidade de análise se refere à *elaboração de tarefas* pelos professores que possam auxiliar no ensino e no entendimento das transformações geométricas. Nesta se enquadram três artigos, que apresentam a elaboração de tarefas como temática principal. Todos esses trabalhos já foram discutidos anteriormente, sendo eles os artigos de Leung (2011), de Moss *et al.* (2015) e de Palha *et al.* (2013).

Síntese da Unidade

Refletindo sobre esta unidade de análise, observa-se ser ela a que apresenta o maior número de temáticas, ou seja, há um número expressivo de recursos didáticos e estratégias metodológicas disponíveis aos professores para serem aplicados em sala de aula. Assim como os *softwares* de geometria dinâmica, pôde-se detectar que os materiais manipulativos, a resolução de problemas e as sequências didáticas são recursos potenciais para o avanço e o aprimoramento do entendimento dos estudantes, em especial, quando se trata das transformações geométricas.

Em conjunto com o uso de livros didáticos e de tarefas bem elaboradas e estruturadas pelos professores, tais recursos e estratégias poderiam ser mais utilizados em sala de aula como uma alternativa para o ensino das transformações geométricas. Além disso, eles dinamizam as aulas e são complementares uns aos outros, apresentando para o estudante uma mesma informação por diversos "ângulos", abrangendo assim todas as formas de apropriação que um conteúdo pode ter (visual, auditiva, manipulativa etc.). As possibilidades de ensino aumentam no que tange ao trabalho dos professores, assim como as oportunidades de aprendizagem dos estudantes se ampliam, quando se estudam as transformações geométricas no contexto escolar.

Considerações finais

Após a análise e a síntese individual de cada artigo, foi possível realizar uma reflexão sobre as temáticas estudadas por eles. Dessa forma, em cada uma das unidades, foi apresentada uma síntese, permitindo a visualização de um panorama das tendências de pesquisa presentes nelas. O Quadro 2 apresenta os aspectos mais relevantes observados em cada uma.

Quadro 2 – Tendências de pesquisa

Unidade de análise	Identificação das principais tendências de pesquisa
Processos formativos, prática docente e/ou conhecimentos do professor	<ul style="list-style-type: none"> – Conhecimento do professor sobre transformações geométricas – Lacunas no conhecimento dos professores sobre transformações geométricas – Carência de estudos sobre formação continuada do professor que ensina matemática – Carência e necessidade de pesquisas
Pensamento geométrico e relação com os estudantes	<ul style="list-style-type: none"> – Desenvolvimento de habilidades de raciocínio – Lacunas no conhecimento dos estudantes sobre as transformações geométricas – Escassez de transformações geométricas nos currículos escolares, em especial, nos anos iniciais do ensino fundamental
Conhecimentos geométricos e tecnológicos	<ul style="list-style-type: none"> – Geometria dinâmica facilita a visualização – Familiaridade dos estudantes quanto ao uso de tecnologias digitais – Lacunas na aprendizagem dos estudantes sobre demonstrações e/ou provas – Carência de pesquisas sobre demonstrações e/ou provas com o uso de softwares de geometria dinâmica
Recursos didáticos e estratégias metodológicas	<ul style="list-style-type: none"> – Necessidade de elaboração de livros didáticos contemplando o ensino das transformações geométricas – Lacunas na formação do professor que ensina matemática para o uso efetivo da ampla variedade de recursos didáticos disponíveis – Multiplicidade de estratégias metodológicas potencializa apropriação do conteúdo pelos estudantes

Fonte: Elaboração própria.

Com base nesse quadro, é possível concluir que a falta de aprofundamento dos professores sobre as transformações geométricas faz com que esse conceito seja abordado superficialmente em sala de aula, o que reflete, conseqüentemente, no conhecimento dos estudantes sobre ele. Destaca-se que muitos professores não possuem conhecimento sobre recursos tecnológicos que poderiam auxiliá-los no ensino das transformações geométricas.

Portanto, esta revisão sistemática de literatura permitiu sintetizar que é necessário investir na formação continuada dos professores que lecionam matemática, pois ela colaborará para suprir as lacunas encontradas

no ensino de transformações geométricas. Em contrapartida, é relevante apontar que os professores podem buscar aprimorar seus conhecimentos por meio de processos de formação disponíveis, já que há oferta de cursos, mas nem sempre existe a demanda específica (conceitual e/ou didática) desejada.

Espera-se que as reflexões aqui apresentadas possam contribuir para nortear pesquisas futuras, em esfera nacional e internacional, acerca do ensino de geometria. Em particular, pesquisas sobre o ensino de transformações geométricas, ressaltando as abordagens metodológicas e os recursos didáticos, como o uso de *softwares* de geometria dinâmica para a integração de demonstrações e/ou provas na educação básica; a efetiva discussão das transformações geométricas nos livros didáticos, principalmente, aqueles elaborados para os anos iniciais do ensino fundamental; e os processos formativos para a discussão dessas transformações por meio de diferentes recursos didáticos.

Referências

ALQAHTANI, M. M.; POWELL, A. B. Mediation activities in a dynamic geometry environment and teachers' specialized content knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, New Jersey, v. 48, p. 77-94, 2017.

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. *Bolema*, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, 1998.

CHINNAPPAN, M.; EKANAYAKE, M. B.; BROWN, C. Knowledge use in the construction of geometry proof by Sri Lankan students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Taiwan, v. 10, n. 4, p. 865-887, Aug. 2012.

DEJARNETTE, A. F. et al. Students' conceptions of reflection: opportunities for making connections with perpendicular bisector. *The Journal of Mathematical Behavior*, New Jersey, v. 43, p. 35-52, 2016.

GÓMEZ-CHACÓN, I. M.; ROMERO-ALBALADEJO, I. M.; GARCÍA-LÓPEZ, M. M. Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical working space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM*, Hamburgo, v. 48, n. 6, p. 909-924, Oct. 2016.

HEALY, L.; FERNANDES, S. H. A. A. Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego. *Educar em Revista*, Curitiba, n. esp. 1, p. 227-243, 2011.

HEINZE, A. et al. Strategies to Foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM*, Hamburgo, v. 40, n. 3, p. 443-453, Aug. 2008.

HOLLEBRANDS, K. F.; LEE, H. S. Characterizing questions and their focus when pre-service teachers implement dynamic geometry tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, New Jersey, v. 43, p. 18-16, 2016.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. O papel do professor e do aluno frente ao uso de um software de geometria interativa: iGeom. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 45, p. 165-192, abr. 2013.

JACINTO, H.; CARREIRA, S. Mathematical problem solving with technology: The techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Taiwan, v. 15, n. 6, p. 1115-1136, 2016.

LAGE, M. A. *Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano*. 2008. 171 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

LEUNG, A. An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM*, Hamburgo, v. 43, n. 3, p. 325-336, July 2011.

LOPES, L. S.; ALVES, G. L. P.; FERREIRA, A. L. A. A simetria nas aulas de Matemática: uma proposta investigativa. *Educação e Realidade*, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 549-572, abr./jun. 2015.

MACIEL, A. M.; RÉGO, R. G.; CARLOS, E. J. Possibilidades pedagógicas do uso da imagem fotográfica no livro didático de Matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 344-364, abr. 2017.

MAIA, C. M. F. *As isometrias na inovação curricular e a formação de professores de Matemática do Ensino Básico*. 2014. 332 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Ciências da Educação e do Património, Universidade Portucalense, Porto, 2014.

MAINALI, B. R.; HECK, A. Comparison of traditional instruction on reflection and rotation in a Nepalese high school with an ICT-rich, student-centered, investigative approach. *International Journal of*

Science and Mathematics Education, Taiwan, v. 15, n. 3, p. 487-507, Nov. 2015.

MARSCHALL, J.; FIOREZE, L. A. *GeoGebra no ensino das transformações geométricas: uma investigação baseada na teoria da negociação de significados*. Porto Alegre: UFRGS, 2015.

MATOS, J. M.; SILVA, M. C. L. O Movimento da Matemática Moderna e diferentes propostas curriculares para o ensino de geometria no Brasil e em Portugal. *Bolema*, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 171-196, abr. 2011.

MEDEIROS, M. F.; GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica no ensino de transformações no plano. *Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, 2015.

MOSS, J. et al. Adapting Japanese lesson study to enhance the teaching and learning of Geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *ZDM*, Hamburgo, v. 47, n. 3, p. 377-390, 2015.

MURARI, C. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011.

NG, O. L.; SINCLAIR, N. Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM*, Hamburgo, v. 47, n. 3, p. 421-434, June 2015.

PALHA, S. et al. Developing shift problems to Foster geometrical proof and understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*, New Jersey, v. 32, n. 2, p. 12-159, 2013.

PAPADOPOULOS, I.; DAGDILELIS, V. Students' use of technological tools for verification purposes in geometry problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, New Jersey, v. 27, n. 4, p. 311-325, 2008.

PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 465-496, 2017.

PRICE, A.; LEE, H. S. The effect of two-dimensional and stereoscopic presentation on Middle School students' performance of spatial cognition tasks. *Journal of Science Education and Technology*, Gainesville, v. 19, n. 1, p. 90-103, 2009.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino da simetria e artes visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema*, Rio Claro, v. 26, n. 42A, p. 291-310, abr. 2012.

SANTOS, M. R.; BICUDO, M. A. V. Uma experiência de formação continuada com professores de Arte e Matemática no ensino de Geometria. *Bolema*, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1329-1347, dez. 2015.

SINCLAIR, M.; BRUCE, C. D. New opportunities in Geometry education at the primary school. *ZDM*, Hamburgo, v. 47, n. 3, p. 319-329, 2015.

THOMPSON, D. R.; SENK, S. L. The same Geometry textbook does not mean the same classroom enactment. *ZDM*, Hamburgo, v. 46, n. 5, p. 781-795, 2014.

TURGUT, M.; YENILMEZ, K.; ANAPA, P. Symmetry and rotation skills of prospective elementary Mathematics teachers. *Bolema*, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 383-402, abr. 2014.

VIEIRA, G.; PAULO, R. M.; ALLEVATO, N. S. G. Simetria no Ensino Fundamental através da resolução de problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 613-630, ago. 2013.

WAGNER, E. *Construções geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

YANIK, H. B. Prospective Middle School Mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, Limerick, v. 78, n. 2, p. 231-260, 2011.

YANIK, H. B. Middle-School students' concept images of geometric translations. *The Journal of Mathematical Behavior*, New Jersey, v. 36, p. 33-50, 2014.

YANIK, H. B.; FLORES, A. Understanding rigid geometric transformations: Jeff's Learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior*, New Jersey, v. 28, n. 1, p. 41-57, 2009.

Recebido em 16 de março de 2018.

Aprovado em 12 de outubro de 2018.