*A Composição de Quantidades que Transformam o Referente: as Soluções dos Professores**

Sandra Magina Tânia
Campos María Carolina da
Cunha Silvia Canoas
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Quando queremos resolver um problema que envolva operações aritméticas, faz-se necessária uma identificação das quantidades envolvidas (contadas ou medidas), as quais chamamos de *referentes.* Assim, as *operações de transformação de referente* podem ser entendidas como uma composição de quantidades, gerando novas quantidades que podem ou não vir a ser novos referentes.

Estas operações são de difícil entendimento para os alunos, e já existem algumas indicações que nos permitem dizer que o mesmo acontece com os professores. Em geral, os alu-

* Este estudo foi realizado com o apoio do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia (CCET) da Pontificia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e do Programa de Estudos e Pesquisas no Ensino de Matemática (Proem).

nos, ao utilizarem este tipo de operação apresentam um melhor desempenho, quando fazem uso de estratégias informais na resolução de problemas.

Investigamos as respostas de 40 professores (20 licenciados em Matemática e 20 professores primários) em dois problemas envolvendo operações de transformação de referente e analisamos as abordagens de sucesso dos mesmos. Os resultados apontaram uma modesta superioridade para os professores licenciados em Matemática; estes tiveram um melhor desempenho do que os professores primários. A maioria das soluções de sucesso foi obtida através de estratégias formais. Destes resultados nasceram as seguintes questões:

1ª) Será que o conhecimento matemático utilizado no cotidiano pode emergir em situações formais?

2ª) E possível formar professores capazes de integrar o conhecimento matemático, formal e abstrato, com o conhecimento da matemática do cotidiano?

Introdução

Sabemos que são infindáveis as dificuldades encontradas no sistema de ensino brasileiro. Pesquisas a este respeito foram e ainda vêm sendo feitas, principalmente com os alunos, tentando diagnosticar as possíveis causas, que também podem estar ligadas à formação de professores.

Pensando nisso, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 1996), em pesquisa realizada em 1993, levantou, dentre outros, alguns problemas relacionados com as mudanças que estão ocorrendo nas condições de trabalho e na competência pedagógica do professor.

Dentre os resultados obtidos pelo SAEB, destacamos alguns relacionados com o perfil dos professores e com sua prática docente:

- 90,7% dos professores são do sexo feminino;
- 35,3 anos é a idade média desses professores;
- Em média, esses professores possuem 11,5 anos de experiência profissional, dos quais 6,5 anos são dedicados à prática como professor regente da classe na mesma escola;
- A grande maioria dos professores completou o *2°* grau ou finalizou estudos em nível superior;
- 40% dos professores apontaram como fatores dificultadores de sua

pràtica a falta de material didático, alunos com baixo nível de informação, alunos carentes, turmas com excesso de alunos, falta de estímulo profissional (por exemplo, baixos salários), falta de oportunidade de aperfeiçoamento. Além disso, associando fatores intra-escolares com os desempenhos dos alunos, observou-se que a escolaridade do professor e o grau de desenvolvimento dos conteúdos curriculares pelos professores influenciam no desenvolvimento das competencias dos alunos. Nesta mesma pesquisa, o SAEB testou também o desempenho escolar dos alunos de 1ª e 3ª séries e de 5ª e 7ª séries em relação à Matemática, entre outras disciplinas avaliadas. Por exemplo, dentre as maiores dificuldades dos alunos das séries iniciais pesquisadas estavam: divisão, adição em situação-problema, multiplicação e divisão por dois algarismos. Já nas 5ª e 7ª séries, o desempenho foi fraco, entre outras, em questões envolvendo números decimais e frações.

Fundamentos teóricos

Também, no âmbito mundial, pesquisadores (Hart, 1988; Nunes, Bryant, 1996; Simon, 1993) têm se preocupado em entender como os conceitos (relacionados principalmente com as operações fundamentais) são formados pelos alunos. Sabemos que existem diferentes processos, concepções e também representações simbólicas, envolvidas numa mesma classe de problemas. A necessidade de um melhor entendimento da aquisição de conhecimentos específicos e habilidades, em relação a situações e problemas, permite-nos introduzir a noção de um campo conceituai.

Segundo Vergnaud (1983,1988, 1994), um campo conceituai pode ser definido como um conjunto de problemas ou situações "cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros. O caso da adição e multiplicação são exemplos de campos conceituais, onde não faz sentido estudá-los isoladamente, mas sim dentro de campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Devido à grande quantidade de conceitos envolvidos nessas estruturas, elas fazem parte de um conhecimento que o aluno adquire a longo prazo.

Assim sendo, no caso das estruturas multiplicativas, objeto de estudo da presente pesquisa, vários conceitos matemáticos, tais como multiplicação, divisão, fração, razão, proporção e números racionais, encontram-se vinculados a esse campo conceituai.

Vergnaud (1994) ainda expõe duas boas razões que justificam o estudo desses sistemas dentro de campos conceituais: primeiro, para buscarmos entender as filiações e os saltos que os estudantes fazem durante a aquisição de um dado conhecimento; e segundo, porque um conceito, por mais simples que seja, não se desenvolve normalmente de forma isolada, mas em estreita relação com outros conceitos, através da resolução de vários tipos de problemas e com a ajuda de várias expressões e simbolismos.

Em consonância com a teoria de Vergnaud, encontramos os estudos de Schwartz, cujas contribuições para a área da Educação Matemática têm acontecido por meio de seus trabalhos com as estruturas multiplicativas.

Schwartz (1988) elaborou uma classificação que nos permite estender uma mesma classe de problemas aos números naturais e racionais positivos. Essa classificação enfoca os referentes dos valores numéricos do problema, verificando se o tipo de referente é uma quantidade intensiva ou extensiva. A distinção entre estas duas quantidades é baseada numa análise dimensional. Na quantidade extensiva, o referente é uma entidade simples (de uma dimensão), enquanto a quantidade intensiva envolve como referente duas entidades (duas dimensões). Não podemos contar ou medir uma quantidade intensiva diretamente. Schwartz ainda distingue dois tipos de operações com quantidades:

• Operações preservando referente tratam da composição de duas quantidades para produzir uma terceira quantidade. E fundamentalmente um tipo de composição permitida pelas operações aritméticas da adição ou subtração.

• Operações transformando referente, obtidas a partir da composição de duas quantidades, iguais ou diferentes, para a produção de uma terceira quantidade, geralmente distinta das duas quantidades originais (por exemplo: a multiplicação e a divisão).

As dificuldades encontradas em operações de transformação de referente têm sido amplamente discutidas na literatura sobre desenvolvimento conceitua] da criança. Os professores também demonstram dificuldades em lidar com tais transformações (Simon, 1993), quando elas não são do tipo bem experimentadas, como, por exemplo, distância dividida pelo tempo ser igual a velocidade. Quando nós considera-mos que um dos objetivos importantes do desenvolvimento numérico na escola é fazer abordagens matemáticas para situações-problema válidas para os alu-nos, as dificuldades dos professores com operações de transformação de referente tornam-se um claro bloco de tropeço para a realização deste objeti-vo. Como nós podemos resolver um problema se nós não conseguimos en-tender o significado da resposta?

Pesquisas em diferentes países têm apresentado as dificuldades de professores da escola primária com problemas de divisão e multiplicação (por exemplo, Simon, 1993; Tirosh, Graeber, 1989) e com operações de transformação de referente envolven-do quantidades intensivas (Thompson, Thompson, 1994). Fica claro que os professores necessitam efetivamente de suporte para promover o entendi-mento de modelos mais complexos no campo conceituai das estruturas multiplicativas.

Com vistas atracar posteriormente estratégias de ensino para os professo-res, nós investigamos a natureza de suas dificuldades e as soluções corretas en-contradas em dois problemas, um en-volvendo multiplicação e outro divisão. Pelo fato de os estudantes mostrarem a manutenção do significado das situações-problema em mente, recorrendo a solu-ções não-algorítmicas (como construir estratégias em problemas de razão), nós queremos saber se estes tipos de solu-ção estariam também presentes entre as respostas corretas dos professores ou se o conhecimento matemático dos mes-mos permitir-lhes-ia alcançar soluções significativas através de regras mais for-mais. O pior cenário seria aquele onde os professores não usassem soluções não-algorítmicas (talvez porque estas es-tão de algum modo excluídas da repre-sentação social do conhecimento mate-mático daqueles), mas não desenvolves-sem conhecimento matemático suficien-te para implementar corretamente solu-ções formais. Nós decidimos, então, in-vestigar o impacto de regras de treina-mento sobre a relativa facilidade em li-dar com composições de transformação de referente.

Metodo

SUJEITOS

Nós entrevistamos 40 professores da cidade de São Paulo, 20 dos quais cujo grau de instrução se resumiu ao curso de magistério (formação no nível de 2º grau) e os outros 20 professores eram licenciados em Matemática, com a graduação completa na universidade (3º grau).

DESENHO

Os professores participaram de um estudo, a fim de investigar suas idéias sobre alguns conceitos matemáticos e como explicá-los para os alunos. Eles responderam a uma série de questões, tratando de multiplicação e divisão. Este trabalho analisa somente duas das respostas dos professores. Nós escolhemos dois problemas não comuns em sala de aula (veja Tabela 1): um propondo uma nova situação (Problema 1) e o outro perguntando de forma diferente o que seria usual para problemas de frações (Problema 2). Ambos tratavam de quantidades extensivas, evitando confundir a dificuldade de transformação de referente com a de quantidades intensivas. Os problemas foram adaptados de Simon (1993; Simon, Blume, 1994), para levar em conta posteriores comparações.

Quadro 1

Problema 1. João e Paulo trabalharam juntos para medir os lados de uma região retangular. João mediu a largura e Paulo, o comprimento. Cada um deles usou uma vareta com comprimentos diferentes. João disse: "A largura é 5 das minhas varetas". Paulo disse: "O comprimento é 4 das minhas varetas". O que eles encontraram sobre a área dessa região retangular? Por quê?

Problema 2. Sérgio tem 35 xícaras de farinha para usar fazendo bolos. Cada bolo que ele faz gasta 3/8 de uma xícara. Se ele usar as 35 xícaras de farinha que ele tem para fazer a maior quantidade de bolos possível, quanto de farinha ainda vai sobrar?

Procedimento

Os professores responderam individualmente a dois questionários escritos, um envolvendo questões de multiplicação e outra de divisão. A resolução de cada questionário aconteceu em dias distintos, porém o tempo gasto em cada um dos questionários não ultrapassou uma hora.

Resultados

ANÁLISE QUANTITATIVA

Primeiro, o desempenho dos dois grupos foi comparado. Nós não nos sentimos à vontade para fazer nenhuma suposição sobre a representativi dade destas amostras, já que as mesmas são pequenas e não foram desenhadas de maneira sistemática Os resultados quantitativos somente podem informar sobre a própria amostra. não possibilitando generalizações. Na Tabela 2 é possível observar as freqüências dos professores que não resolveram os problemas, dos que resolveram incorretamente e dos que resolveram corretamente. Uma resposta correta no Problema 1 indicava o número e a natureza das unidades de medida de área; no Problema 2,1/8 de xícara era a resposta correta.

Tabela 1 - Freqüência das respostas para cada grupo de professores

	Problema 1			Problema 2		
	Em branco	Errado	Certo	Em branco	Errado	Certo
Professor Primário	10	8	2	8	12	0
Professor Licenciado	0	11	9	1	12	7

A análise quantitativa indicou que:

a) os problemas não são triviais para os professores, e as razões de sucesso são modestas - no caso dos professores licenciados, a razão de sucesso no Problema 2 é comparável ao que foi observado por Simon, 1993, em sua amostra de professores primários dos Estados Unidos;

b) os professores de magistério solucionaram os problemas com menor freqüência, mesmo onde não existia dificuldade de cálculo (Problema 1); c) a diferença no desempenho dos dois grupos nestes itens foi significante (um teste para amostras independentes indicou que a significancia de respostas corretas para ambos os problemas diferiu significativamente no nivel 004).

ANALISE QUALITATIVA

O objetivo desta análise foi investigar a natureza das estratégias de sucesso. Para cada problema, nós imaginamos uma classificação descritiva do processo usado para encontrar a resposta.

Problema 1

As respostas para o Problema 1 foram analisadas em quatro categorias:

/. *Multiplicação dos números e das unidades, indicando que uma nova unidade foi formada pelo produto das unidades originais.*

Duas abordagens diferentes foram identificadas: uma formal, onde as unidades e o produto das mesmas foi representado por letras; e uma abordagem integrada, onde uma representação formal foi relacionada com uma experimental, mencionando explicitamente uma unidade retangular de área. É importante notar que não existe solução experimental sem que uma abordagem formal seja observada. Nenhuma resposta dos professores primários e nove respostas dos professores licenciados aparecem nessa categoria. Um exemplo desta abordagem formal é:

5j.4p = 20jp, j (medida de uma vareta) p (medida da outra vareta)

Um exemplo de uma abordagem integrada está ilustrado na resposta abaixo,[1] onde o sujeito apresenta duas soluções paralelas: na Solução 1 demonstra sua resposta algebricamente, enquanto que na Solução 2 explica o algoritmo utilizado na Solução 1 :

"20 vezes o produto de duas unidades de medidas"

Exemplo reproduzido, na íntegra, do protocolo um de nossos sujeitos.

S. 1: L $\rightarrow$ 5 · UJ
C $\rightarrow$ 4 · UP
L · C = A_R
5 · UJ · 4 · UP
20 · UJ · UP = 20 · PRODUTO DA
UNIDADE DE MEDIDA

S. 2: "PARA CADA VARETA C, EXISTEM 4 NO COMPRIMENTO E PARA CADA VARETA L EXISTEM 5 NA LARGURA, ISTO É, EXISTEM 20 RETÂNGULOS IGUAIS A L E C, NO TOTAL, DENTRO DA FIGURA" (sic.)

2. Multiplicação dos números sem fazer referência às unidades, como se estas não fossem problemáticas.

Duas das respostas de cada grupo de professores estavam presentes nesta categoria.

3. Negação da possibilidade do cálculo da área.

Alguns professores recusaram a possibilidade de se ter alguma informação a respeito da área da superfície, por acreditarem que, para que se possa medir, é necessário que se tenha uma unidade simples. Este tipo de explicação claramente falha na avaliação de que uma nova unidade está sendo formada através do produto de duas medidas lineares, e serão constantes para a superfície total. Três professores de magistério e cinco professores licenciados deram este tipo de resposta.

4. Respostas que necessitam de consistência interna.

Algumas respostas levaram-nos a refletir sobre a emergência de uma nova unidade, a qual era incompleta ou inconsistente com a informação dada no problema. Quatro professores com magistério e cinco professores licenciados mostraram este tipo de resposta. Um exemplo:

"Vinte varetas quadradas. É uma região retangular (note que o professor indicou que uma nova unidade é formada, mas chamou-a de "quadrada", aparentemente sem nenhuma apropriação de ambos os sentidos de "quadrada" nesta expressão, onde a unidade é quadrada pois x é multiplicado por x e onde a unidade de área resultante é a quadrada)".

Problema 2

As respostas ao Problema 2 mostraram uma grande variedade de abordagens, as quais descrevemos em seis categorias.

1. Uso de um procedimento formal, mantendo em mente a transformação do referente.

Esta questão envolve a divisão de 35 xícaras por 3/8, identificando a quantidade de farinha utilizada e qual a porção de farinha que sobra; este cálculo mostra uma nova transformação de referente, da fração de farinha para fração de xícara. Somente dois professores licenciados, que fizeram uso da solução formal com sucesso, escreveram abaixo do referente, no final de cada cálculo, como exemplificaremos a seguir:

35 xícaras 1 bolo 3/8 xícara nenhum bolo

$= \frac{35}{3/8} = 35 \text{ x } 318 = 93$

1/3 bolos (cálculos aqui)

93 bolos 1/3 de bolo que sobra

1/3 bolo 1/3 X 3/8 xícara =1/8 xícara sobra

2. Uso de um procedimento formal, que falha na observação da transformação de referente.

Esta estratégia (usada por três professores com magistério e sete professores licenciados) envolve o uso do mesmo passo inicial dividindo 35 por 3/8, onde os professores usaram o resto 1/3 para se referir às xícaras de farinha.

3. Uso de uma solução de medida que evita a transformação de referente.

Esta solução (usada por dois professores licenciados) envolve o cálculo de quantos oito existem em 35 partes, dados pela divisão por 3/8. Um exemplo:

$$35 = \frac{35 \text{ x } 8}{8} = \frac{280}{8} = \frac{279}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ X } 93 + \frac{1}{8}$$

4. Solução escalar que mantém em mente o referente.

Esta solução (usada por dois professores licenciados) envolve uma estratégia avançada onde a correspondência entre xícaras de farinha e bolos foi preservada; pequenos passos foram utilizados, ao invés de composições artificiosas usando bolo ou xícara por xícara. Por exemplo:

1 xícara → 2 bolos e 2/8 sobram

2 xícaras + 1/8 ® 2 bolos + 1 bolo + 1/8

3 xícaras →2 bolos + 2/8 e 1 bolo

3 xícaras → 8 bolos

33 xícaras → 11 x 8 = 88 bolos

xícaras → $\frac{5}{93}$ bolos e 1/8 de xícara sobra

5.Calcularam 3/8 de 35 e indicaram os 5/8 restantes como resposta.

Parece-nos que este tipo de solução cai no problema clássico de frações: O que é 3/8 de 35? Ou: O que está sobrando de 35 se utilizarmos 3/8? Em outros casos, respostas pouco razoáveis foram obtidas: as respostas como aproximadamente 13 e 22 xícaras, as quais representam quantidades consideravelmente grandes em relação a 3/8 de uma xícara, que ultrapassa o limite de resposta deste problema. Um professor com magistério e três professores licenciados responderam desta forma.

6. Uma mistura de cálculos que não se encaixam em nenhum modelo de raciocínio.

Um total de oito professores com magistério e quatro professores licenciados apresentaram este tipo de resposta.

Discussão e conclusão

A principal proposta deste estudo foi investigar de que forma as operações de transformação de referente apresentam-se nas dificuldades dos professores e como eles poderiam superá-las. No Problema 1, poucos professores estabeleceram uma conexão clara entre a multiplicação de duas medidas lineares e uma unidade de área. No Problema 2, a maioria dos professores falhou na percepção das soluções inadequadas, onde as respostas chegavam a ser maiores que 3/8. Estes resultados sugerem que é possível que soluções não-algorítmicas estejam bloqueadas pela instrução matemática dada na escola pelas professores, dos quais era esperado sucesso nas questões. Poderiam os professores -já que a maioria eram mulheres - apresentarem uma forma diferente de solução do Problema 2, relacionando-o com seu cotidiano (por exemplo, a cozinha)?

Embora este estudo responda a algumas questões, várias outras ficaram por serem respondidas, as quais, a nosso ver, mereceriam especial atenção para futuras pesquisas no âmbito da formação de professores.

Primeiramente, pode ser interessante saber como um trabalho com professores mostraria efeitos no contexto social, testando-os similarmente, como foi observado por Nunes, Schliemann, e Carraher (1993) com crianças brasileiras. Será que os professores poderão aprender mais na sua formação, se não deixarem de lado seus conhecimentos da Matemática do cotidiano? Será que eles estão preparados para relacionar soluções não formais e formais? E ainda, será possível o desenvolvimento de técnicas de instrução por parte dos professores, que levem os alunos a estabelecer tais relações? Segundo, da variedade de soluções apresentadas no problema 2 emergem outras questões: os professores estão aptos a colocar seus alunos em frente destas diferentes soluções? Será que eles reconhecem as diferentes estratégias que estão por detrás de diferentes métodos? E quais são as regras que rodeiam a discussão destes diferentes métodos na formação de professores?

Referências bibliográficas

HART, K. Ratio and proportion. In: HILBERT, J., BEHR, M. (Ed.). *Number concepts and operations in the Middle Grades.* New Jersey : Erlbaun, 1988. p. 198-219.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. *SAEB 1995* : Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica. Brasília : Secretaria de Desenvolvimento Inovação e Avaliação Educacional/Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, 1996.35 p.

NUNES, T., BRYANT, P. *Children doing mathematics.* Oxford : Blackwell Publishers, 1996.

NUNES, T., SCHIEMANN, A. D., CARRAHER, D. W. *Street mathematics, school mathematics.* New York : Cambridge University Press, 1993.

SCHWARTZ, J. L. Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: HILBERT, J., BEHR, M. (Ed.). *Number concepts and operations in the Middle Grades.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics, 1988. v. 2, p. 119-140.

SIMON, M. A. Prospective elementary teachers knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 24, p. 23-254, 1993.

SIMON, M. A., BLUME, G Building and understanding multiplicative relationships : a study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 25, n. 5, p. 472-493, 1994.

THOMPSON, P. W., THOMPSOM, A. G. Talking about rates conceptually, part I : a teachers struggle. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 25, p. 279-303, 1994.

TIROSH, D. A., GRAEBER, A. Preservice elementary teachers explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics,* v. 20, p. 79-96, 1989.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R., LANDAU, M. (Ed.). *Acquisitions of mathematics concepts and procedures.* New York : Academic Press, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G Multiplicative structures. In: HILBERT, J., BEHR, M. (Ed.). *Number concepts and operations in the Middle Grades.* New Jersey : Erlbaun, 1988. p. 141-161.

_______ . Multiplicative conceptual field; waht and why? In: HAREL, G, CONFREY, J. (Ed.). *The development of multiplicative reasoning in the jearning of Mathematics.* New York : State University of New York Press, 1994.